АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ

«Колледж информационных технологий и финансов»

(АН ПОО «Колледж информационных технологий и финансов»)

УТВЕРЖДАЮ

Директор ____________ Винокурова И.В.

«20» декабря 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН.03 Финансовая математика

(индекс и наименование учебной дисциплины)

38.02.06 Финансы

(код и наименование специальности)

Квалификация выпускника Финансист

(наименование квалификации)

Уровень базового образования обучающихся – основное общее образование

Воронеж

2017

Простые проценты

1. Проценты и процентные ставки

Под ***процентными деньгами*** или, проще говоря, ***процентами*** в финансовых расчетах понимают абсолютную величину дохода от предоставления, денег в долг в любой форме: в виде выдачи денежной ссуды, продажи в кредит, помещении денег на сберегательный счет, учета векселя и т.д.

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере ***процентной ставки*** - отношение суммы процентных денег, выплачиваемых за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды. Интервал времени, к которому относится процентная ставка, называют ***периодом начисления.***

Проценты либо выплачиваются кредитору по мере их начисления, либо присоединяются к сумме долга. Процесс увеличения денег в связи с присоединением процентов к **сумме** долга называют ***наращением,*** или ***ростом,*** первоначальной суммы.

В практике существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контрактов. Соответственно применяют различные виды процентных ставок. Одно из основных отличий связано с выбором исходной базы (суммы) для начисления процентов. Ставки процентов могут применяться к одной и той же начальной сумме на протяжении всего срока ссуды или к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. В первом случае они называются ***простыми,*** а во втором - ***сложными процентными ставками.***

Процентные ставки, указываемые в контрактах, могут быть ***постоянными*** *или* ***переменными («плавающими»).*** В этом случае значение ставки может быть равно сумме некоторой изменяющейся во времени базовой величины и надбавки к ней ***(маржи).***

2. Формула наращения по простым процентам

Под ***наращенной суммой*** ссуды (долга, депозита, других видов инвестированных средств) понимается первоначальная ее сумма вместе с начисленными на нее процентами к концу срока.

Пусть P - первоначальная сумма денег, i - ставка простых процентов. Начисленные проценты за один период равны Pi, а за n периодов - Pni.

Процесс изменения суммы долга с начисленными простыми процентами описывается арифметической прогрессией, членами которой являются величины P:

$$P + Pi = P(1+i),\ P(1+i) + Pi = P(1+2i) \text{ и т.д. до } P(1+ni).$$

Первый член этой прогрессии равен P, разность - Pi, а последний член, определяемый как

$$S = P(1+ni) \tag{1.1}$$

и является наращенной суммой. Формула (1.1) называется ***формулой наращения по простым процентам,*** или формулой простых процентов. Множитель (l + ni) является ***множителем наращения.*** Он показывает во сколько раз наращенная сумма больше первоначальной суммы. Наращенную сумму можно представить в виде двух слагаемых: первоначальной суммы P и суммы процентов I:

$$S = P + I \tag{1.2}$$

где

$$I = Pni \tag{1.3}$$

Пример 1. Ссуда равна 100 000 руб., срок долга 1,5 года при ставке простых процентов, равной 15 % годовых. Определить проценты и сумму накопленного долга.

Решение. Используя формулы (1.2) и (1.3), находим:

$I = 100000 \times 1{,}5 \times 0{,}15 = 22500$ руб. - проценты за 1,5 года;

$S = 100000 + 22500 = 122500$ руб. - наращенная сумма.

3. Практика начисления простых процентов

Ставка процентов обычно устанавливается в расчете за год, поэтому при продолжительности ссуды менее года необходимо выяснить, какая часть процента уплачивается кредитору. Для этого величину n выражают в виде дроби:

$$n = t / K \qquad (1.4)$$

где n - срок ссуды (измеренный в долях года),

К — число дней в году (временная база),

t - срок операции (ссуды) в днях.

Здесь возможно несколько вариантов расчета процентов, различающихся выбором временной базы *К* и способом измерения срока пользования ссудой.

Часто за базу измерения времени берут год, условно состоящий из 360 дней (12 месяцев по 30 дней в каждом). В этом случае говорят, что вычисляют ***обыкновенный,*** *или* ***коммерческий,*** процент. В отличие от него **точным** процент получают, когда за базу берут действительное число дней в году: 365 или 366.

Определение числа дней пользования ссудой также может быть ***точным*** *или* ***приближенным.*** В первом случае вычисляют фактическое число дней между двумя датами, во втором продолжительность ссуды определяется числом месяцев и дней ссуды, приближенно считая все месяцы равными, содержащими по 30 дней. В обоих случаях дата выдачи и дата погашения долга считается за один день.

Комбинируя различные варианты временной базы и методов подсчета дней ссуды, получаем три варианта расчета процентов, применяемые в практике:

а) точные проценты с точным числом дней ссуды;

б) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды;

в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

Вариант расчета с точными процентами и приближенным измерением времени ссуды не применяется.

Пример 2. Ссуда, размером 1 000 000 руб., выдана на срок с 21 января 2002 г. до 3 марта 2002 г. при ставке простых процентов, равной 20 % годовых. Найти:

а) точные проценты с точным числом дней ссуды;

б) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды;

в) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

Решение. Используем формулы (1.1.3) и (1.1.4)

а) $K = 365$, $t = 41$, $I = 1\,000\,000 \cdot 0{,}2 \cdot 41 / 365 = 22\,465{,}75$ руб.

б) $K = 360$, $t = 41$, $I = 1\,000\,000 \cdot 0{,}2 \cdot 41 / 360 = 22\,777{,}78$ руб.

в) $K = 360$, $t = 42$, $I = 1\,000\,000 \cdot 0{,}2 \cdot 42 / 360 = 23\,333{,}33$ руб.

1.4. Простые переменные ставки

В ряде случаев процентные ставки не остаются неизменными во времени. Поэтому в кредитных соглашениях иногда предусматриваются дискретно изменяющиеся во времени процентные ставки. В этом случае формула расчета наращенной суммы принимает следующий вид:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ...) = P(1 + \sum n_k i_k) \qquad (1.5)$$

где P - первоначальная сумма (ссуда),

i_k - ставка простых процентов в периоде с номером k,

n_k - продолжительность периода начисления по ставке i_k.

Пример 3. Пусть в договоре, рассчитанном на год, принята ставка простых процентов на первый квартал в размере 10 % годовых, а на каждый последующий квартал - на 1% меньше, чем в предыдущий. Определим множитель наращения за весь срок договора.

$$1 + \sum n_k i_k = 1 + 0{,}25 x 0{,}1 + 0{,}25 x 0{,}09 + 0{,}25 x 0{,}08 + 0{,}25 x 0{,}07 = 1{,}085$$

5. Дисконтирование и учет по простым ставкам

В практике часто приходится решать задачу, обратную наращению процентов, когда по заданной сумме S, соответствующей концу финансовой операции, требуется найти исходную сумму P. Расчет P по S называется ***дисконтированием*** суммы S. Величину *P,* найденную дисконтированием, называют ***современной величиной (текущей стоимостью)*** суммы S. Проценты в виде разности $D = S - P$ называются ***дисконтом*** *или* ***скидкой.***

Известны два вида дисконтирования: математическое дисконтирование и банковский (коммерческий) учет.

Математическое дисконтирование. Этот вид дисконтирования представляет собой решение задачи, обратной наращению первоначальной ссуды. Если в прямой задаче $S = P(1+ni)$, то в обратной

$$P = S\frac{1}{1+ni}. \tag{1.6}$$

Дробь в правой части равенства при величине S называется ***дисконтным множителем.*** Этот множитель показывает, какую долю составляет первоначальная сумма ссуды в окончательной величине долга. Дисконт суммы S равен

$$D = S - P \tag{1.7}$$

Пример 4. Через 90 дней после подписания договора должник уплатит 1 000 000 руб. Кредит выдан под 20 % годовых (проценты обыкновенные). Какова первоначальная сумма и дисконт?

Решение. Используем формулы (1.6) и (1.7):

P = S / (1 + ni) = 1 000 000 / (1 + 0,20 · 90 / 360) = 952 380,95 руб.

D = S - P = 1 000 000 - 952 380,95 = 47 619,05 руб.

Банковский или коммерческий учет. Операция учета (учета векселей) заключается в том, что банк до наступления срока платежа по векселю или другому платежному обязательству покупает его у владельца (являющегося кредитором) по цене ниже той суммы, которая должна быть выплачена по нему в конце срока, т.е. приобретает (учитывает) его с дисконтом.

Для расчета процентов при учете векселей применяется ***учетная ставка*** d.

По определению, простая годовая учетная ставка находится так:

$$d = \frac{S-P}{Sn} \tag{1.8}$$

Размер дисконта или учета, удерживаемого банком, равен

$$D = Snd \tag{1.9}$$

откуда

$$P = S - D = S - Snd = S(1-nd) \tag{1.10}$$

Множитель (1 - nd) называется ***дисконтным множителем.*** Срок n измеряет период времени от момента учета векселя до даты его погашения в годах. Дисконтирование по учетной ставке производится чаще всего при условии, что год равен 360 дням.

Пример 5. Через 90 дней предприятие должно получить по векселю 1 000 000 рублей. Банк приобрел этот вексель с дисконтом. Банк учел вексель по учетной ставке 20 % годовых (год равен 360 дням). Определить полученную предприятием сумму и дисконт.

Решение. Используем формулы (1.1.9) и (1.1.10):

D = Snd = 1 000 000 · 0,2· 90 / 360 = 50 000 руб.;

P = S - D = 1 000 000 - 50 000 = 950 000 руб.

Сложные проценты

Сложные проценты применяются в долгосрочных финансово-кредитных операциях, если проценты не выплачиваются периодически сразу после их начисления за прошедший интервал времени, а присоединяются к сумме долга. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, часто называют ***капитализацией*** процентов.

1. Формула наращения но сложным процентам

Пусть первоначальная сумма долга равна Р, тогда через один год сумма долга с присоединенными процентами составит $P(1 + i)$, через 2 года $P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2$, через n лет - $P(1 + i)^n$. Таким образом, получаем формулу наращения для сложных процентов:

$$S = P(1+i)^n, \tag{2.1}$$

где S - наращенная сумма,

i - годовая ставка сложных процентов,

n - срок ссуды,

$(1 + i)^n$ - множитель наращения.

В практических расчетах в основном применяют дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за одинаковые интервалы времени (год, полугодие, квартал и т.д.).

Пример 6. В кредитном договоре на сумму 1 000 000 руб. и сроком на 4 года зафиксирована ставка сложных процентов, равная 20 % годовых. Определить наращенную сумму.

Решение. Используем формулу (2.1).

$S = 1\,000\,000 \cdot (1+0{,}2)^4 = 2\,073\,600$ руб.

2. Формула наращения по сложным процентам при изменении ставки во времени

Если ставка сложных процентов меняется во времени, формула наращения имеет следующий вид:

$$S = P(1+i_1)^{n_1}(1+i_2)^{n_2}...(1+i_k)^{n_k} \tag{2.2}$$

где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ - последовательные значения ставок процентов, действующих в периоды $n_1, n_2, \ldots, n_k$, соответственно.

Пример 7. В договоре зафиксирована переменная ставка сложных процентов, определяемая как 20 % годовых плюс маржа 10 % в первые два года, 8 % - в третий год, 5 % - в четвертый год. Определить величину множителя наращения за 4 года.

Решение.

$$(1 + 0{,}3)^2(1 + 0{,}28)(1 + 0{,}25) = 2{,}704$$

3. Номинальная и эффективная ставки процентов

Номинальная ставка. Пусть годовая ставка сложных процентов равна j, а число периодов начисления в году m. При каждом начислении проценты капитализируются, то есть добавляются к сумме с начисленными в предыдущем периоде процентами. Каждый раз проценты начисляют по ставке j/m. Ставка j называется ***номинальной***. Начисление процентов по номинальной ставке производится по формуле:

$$S = P(1+j/m)^N \tag{2.3}$$

где N - число периодов начисления (N = mn, может быть и дробное число).

Пример 8. Ссуда 20 000 000 руб. предоставлена на 28 месяцев. Проценты сложные, ставка 60 % годовых. Проценты начисляются ежеквартально. Вычислить наращенную сумму.

Решение. Начисление процентов ежеквартальное. Всего имеется N = (28/3) кварталов. Число периодов начисления в году m = 4. По формуле (2.3) находим:

$$S = 20\,000\,000 \cdot (1+ 0,60 / 4)^{28/3} = 73\,712\,844,81 \text{ руб.}$$

Эффективная ставка показывает, какая годовая ставка сложных процентов дает тот же финансовый результат, что и m-разовое наращение в год по ставке j/m

Если проценты капитализируются *m* раз в год, каждый раз со ставкой j*/m,* то, по определению, можно записать равенство для соответствующих множителей наращения

$$(1+i)^n = (1+j/m)^{mn} \tag{2.4}$$

где i - эффективная ставка, а j – номинальная. Отсюда получаем, что связь между эффективной и номинальной ставками выражается соотношением

$$i = (1+j/m)^m - 1 \tag{2.5}$$

Обратная зависимость имеет вид:

$$j = m((1+i)^{1/m} - 1) \tag{2.6}$$

Пример 9. Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты ежеквартально, исходя из номинальной ставки в 10 % годовых.

Решение. По формуле (2.5) находим.

$$i = (1 + 0,1 / 4)^4 – 1 = 0,1038 \text{ т.е. } 10,38 \%.$$

Пример 10. Определить, какой должна быть номинальная ставка при ежеквартальном начислении процентов, чтобы обеспечить эффективную ставку в 12 % годовых

Решение. По формуле (2.6) находим:

$$j = 4((1 + 0,12)^{1/4} – 1) = 0,11495, \text{ т.е. } 11,495 \%.$$

4. Учет (дисконтирование) по сложной ставке процентов

Математический учет. В этом случае решается задача обратная наращению по сложным процентам. Запишем исходную формулу для наращения $S = P(1+i)^n$ и решим ее относительно P:

$$P = S\frac{1}{(1+i)^n} \tag{2.7}$$

где

$$\frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n} \tag{2.8}$$

(учетный, или дисконтный, множитель).

Величину P, полученную дисконтированием S, называют ***современной,*** или ***текущей стоимостью,*** или ***приведенной величиной*** S Суммы P и S эквивалентны в том смысле, что платеж в сумме S через n лет равноценен сумме P, выплачиваемой в настоящий момент.

Разность D = S - P называют дисконтом

Пример 11. Через 5 лет предприятию будет выплачена сумма 1 000 000 руб Определить его современную стоимость при условии, что применяется ставка сложных процентов в 10 % годовых

Решение. По формуле (2.7) находим:

$$P = 1\,000\,000 \cdot (1 + 0,10)^{-5} = 620\,921,32 \text{ руб.}$$

Если проценты начисляются m раз в году, то получим:

$$P = S\frac{1}{(1+j/m)^{mn}} \tag{2.9}$$

где

$$\frac{1}{(1+j/m)^{mn}} = (1+j/m)^{-mn} \tag{2.10}$$

дисконтный множитель.

Банковский учет. В этом случае предполагается использование сложной учетной ставки. Дисконтирование по сложной учетной ставке осуществляется по формуле:

$$P = S(1-d_{сл})^n \tag{2.11}$$

где $d_{сл}$ - сложная годовая учетная ставка. Дисконт в этом случае равен

$$D = S - P = S - S(1-d_{сл})^n = S(1-(1-d_{сл})^n). \tag{2.12}$$

При использовании сложной учетной ставки процесс дисконтирования происходит с прогрессирующим замедлением, так как учетная ставка каждый раз применяется к сумме, уменьшенной за предыдущий период на величину дисконта.

Пример 12. Через 5 лет по векселю должна быть выплачена сумма 1 000 000 руб. Банк учел вексель по сложной учетной ставке в 10 % годовых. Определить дисконт.

Решение. По формуле (2.11) находим:

$$P = 1\,000\,000 \cdot (1 - 0{,}10)^5 = 590\,490{,}00 \text{ руб.};$$

$$D = S - P = 1\,000\,000 - 590\,490 = 409\,510 \text{ руб.}$$

5. Учет инфляции

Говорят, что темп инфляции составляет долю α в год, если один и тот же набор товаров стоит в конце года в $(1+\alpha)$ раз больше чем в начале года, или, что то же самое, в $(1+\alpha)$ раз уменьшилась покупательная способность одной денежной единицы.

Владельцы денег, разумеется, не могут смириться с их инфляционным обесценением и предпринимают различные попытки компенсации потерь. Наиболее распространенной является корректировка ставки процента, по которой производится наращение, т.е. увеличение ставки на величину так называемой ***инфляционной премии***. Итоговую величину (ставку процента с учетом инфляции) можно назвать ***брутто-ставкой***.

Определим брутто-ставку (обозначим ее как r*)* при условии полной компенсации инфляции. При наращении по сложной процентной ставке находим брутто-ставку из равенства множителей наращения (слева множитель наращения, учитывающий брутто-ставку – справа множитель наращения (1+i) с учетом инфляции α):

$$1 + r = (1+i)(1+\alpha)$$

Откуда

$$r = i + \alpha + i\alpha \tag{2.13}$$

Доходность с учетом инфляции. Перейдем теперь к измерению реальной доходности финансовой операции, т.е. доходности с учетом инфляции. Если r объявленная норма доходности (или брутто-ставка), то реальный показатель доходности в виде годовой процентной ставки i можно определить при наращении сложных процентов на основе (2.13):

$$i = \frac{1+r}{1+\alpha} - 1 \tag{2.14}$$

Пример 13. Предполагаемый темп инфляции 3 % в год. Какую ставку сложных процентов необходимо указать в договоре, чтобы получить реальную доходность 10 % годовых.

$$r = 0{,}1 + 0{,}03 + 0{,}1x0{,}03 = 0{,}133 \text{ или } 13{,}3\ \%$$

Потоки платежей

Очень часто в контрактах финансового характера предусматриваются не отдельные разовые платежи, а серия платежей, распределенных во времени. Примерами могут быть регулярные выплаты в целях погашения долгосрочного кредита вместе с начисленными на него процентами; периодические взносы на расчетный счет, на котором формируется некоторый фонд различного назначения (инвестиционный, пенсионный, страховой, резервный, накопительный и т.д.); дивиденды, выплачиваемые по ценным бумагам; выплаты пенсий из пенсионного фонда и пр. Ряд последовательных выплат и поступлений называют ***потоком платежей.*** Выплаты представляются отрицательными величинами, а поступления - положительными.

Обобщающими характеристиками потока платежей являются наращенная сумма и современная величина. Каждая из этих характеристик является числом.

Наращенная сумма потока платежей - это сумма всех членов последовательности платежей с начисленными на них процентами к концу срока ренты.

Под ***современной величиной потока платежей*** понимают сумму всех его членов, дисконтированных (приведенных) на некоторый момент времени, совпадающий с началом потока платежей или предшествующий ему.

Конкретный смысл этих обобщающих характеристик определяется природой потока платежей, причиной, его порождающей. Например, наращенная сумма может представлять собой итоговый размер формируемого инвестиционного или какого-либо другого фонда, общую сумму задолженности. Современная величина может характеризовать приведенную прибыль, приведенные издержки.

1. Финансовые ренты и их классификация

Поток платежей, все члены которого положительные величины, а временные интервалы между платежами постоянны, называют ***финансовой рентой,*** или ***аннуитетом.***

Финансовая рента имеет следующие параметры: ***член ренты*** - величина каждого отдельного платежа, ***период ренты*** – временной интервал между двумя соседними платежами, ***срок ренты*** - время, измеренное от начала финансовой ренты до конца ее последнего периода, ***процентная ставка*** - ставка, используемая при наращении или дисконтировании платежей, образующих ренту.

Виды финансовых рент. Классификация рент может быть произведена по различным признакам.

В зависимости от продолжительности периода ренты делят на ***годовые и р-срочные,*** где р - число выплат в году.

По числу начислений процентов различают ренты с начислением ***один раз в году, т раз*** или ***непрерывно.*** Моменты начисления процентов могут не совпадать с моментами рентных платежей.

По величине членов различают ***постоянные*** (с равными членами) и ***переменные ренты.*** Если размеры платежей изменяются по какому-либо математическому закону, то часто появляется возможность вывести стандартные формулы, значительно упрощающие расчеты.

По вероятности выплаты членов различают ***ренты верные и условные.*** Верные ренты подлежат безусловной выплате, например при погашении кредита. Выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события. Поэтому число ее членов заранее неизвестно. Например, число выплат пенсий зависит от продолжительности жизни пенсионера.

По числу членов различают ренты с конечным числом членов (или ограниченные) и бесконечные (или вечные). В качестве вечной ренты можно рассматривать выплаты по облигационным займам с неограниченными или нефиксированными сроками.

В зависимости от наличия сдвига момента начала ренты по отношению к началу действия контракта или какому-либо другому моменту ренты подразделяются на ***немедленные*** **и** ***отложенные*** (или ***отсроченные).*** Срок немедленных рент начинается сразу, а у отложенных запаздывает.

Ренты различают по моменту выплаты платежей. Если платежи осуществляются в конце каждого периода, то такие ренты называются ***обычными,*** или ***постнумерандо.*** Если же выплаты производятся в начале каждого периода, то ренты называются ***пренумерандо.*** Иногда предусматриваются платежи в середине каждого периода.

Анализ потоков платежей в большинстве случаев предполагает расчет наращенной суммы или современной величины ренты.

2. Формулы наращенной суммы

Обычная годовая рента. Пусть в конце каждого года в течение n лет на расчетный счет вносится по R рублей, сложные проценты начисляются один раз в год по ставке i. В этом случае первый взнос к концу срока ренты возрастет до величины $R(1+i)^{n-1}$, так как на сумму R проценты начислялись в течение (n –1) года. Второй взнос увеличится до $R(1+i)^{n-2}$ и т.д. На последний взнос проценты не начисляются. Таким образом, в конце срока ренты ее наращенная сумма будет равна сумме членов геометрической прогрессии:

$$S = R + R(1+i) + R(1+i)^2 + \ldots + R(1+i)^{n-1}$$

в которой первый член равен R, знаменатель (1 + i), число членов n. Отсюда:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)-1} = R\frac{(1+i)^n - 1}{i} = Rs_{n;i} \tag{3.1}$$

где

$$s_{n;i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i} \tag{3.2}$$

коэффициент наращения ренты. Он зависит только от срока ренты n и уровня процентной ставки i.

Пример 14. В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн. руб., на которые 1 раз в год начисляются проценты по сложной годовой ставке в 10 %. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение. По формуле (3.1) находим:

$$S = 10[(1+0{,}1)^3 - 1] / 0{,}1 = 33{,}1 \text{ млн. руб.}$$

Годовая рента, начисление процентов m раз в году. Посмотрим, как усложнится формула, если предположить теперь, что платежи делают один раз в конце года, а проценты начисляют m раз в году. Это означает, что применяется каждый раз ставка j/m, где j - номинальная ставка процентов. Тогда наращенная сумма ренты будет:

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)^m - 1} = Rs_{mn;\,j/m} \tag{3.3}$$

Пример 15. В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн руб., на которые ежеквартально (m = 4) начисляются проценты по сложной годовой ставке в 10 %. Требуется определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение. По формуле (3.3) находим:

$$S = 10[(1 + 0{,}1/4)^{3\cdot 4} - 1] / [(1+0{,}1/4)4 - 1] = 33{,}222 \text{ млн. руб.}$$

Рента p-срочная, m = 1. **).** Пусть рента выплачивается p раз в году равными суммами, процент начисляется раз в конце года. Если годовая сумма платежей равна R, то каждый раз выплачивается R/p. Общее число членов ренты равно np. Последовательность членов ренты с начисленными процентами представляет собой геометрическую прогрессию. Первый член ее равен R/p , знаменатель — $(1+i)^{1/p}$. Сумма членов этой прогрессии

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+j/m)^{(1/p)n}-1}{(1+j/m)^{1/p}-1}=R\frac{(1+i)^n-1}{p((1+i)^{1/p}-1)}=Rs_{n;i}^{(p)} \quad (3.4)$$

где

$$s_{n;i}^{(p)}=\frac{(1+i)^n-1}{p((1+i)^{1/p}-1)} \quad (3.5)$$

коэффициент наращения р-срочной ренты при m = 1.

Пример 16. В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи равными долями из расчета 10 млн. руб. в год (т.е. по 10/4 млн. руб. в квартал), на которые в конце года начисляются проценты по сложной ставке в 10 % годовых. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение. По формуле (3.4) находим:

$$S = (10/4) \times [(1+0{,}1)^3 - 1] / [(1+0{,}1)^{1/4} - 1] = 34{,}317 \text{ млн. руб.}$$

Рента р-срочная, р = m. В контрактах часто начисление процентов и поступление платежа совпадают во времени. Таким образом, число платежей *p* в году и число начислений процентов m совпадают, т.е. *p = m*. Тогда для получения формулы расчета наращенной суммы можно воспользоваться аналогией с годовой рентой и одноразовым начислением процентов в конце года, для которой

$$S=R\frac{(1+i)^n-1}{i}$$

Различие будет лишь в том, что все параметры теперь характеризуют ставку и платеж за период, а не за год. Получаем:

$$S=\frac{R}{m}\cdot\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j/m}=R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j} \quad (3.6)$$

Пример 17. В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи равными долями из расчета 10 млн. руб. в год (т.е. по 10/4 млн. руб. в квартал), на которые ежеквартально начисляются проценты по сложной ставке в 10 % годовых. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение. По формуле (3.6) находим:

$S = 10 \times [(1 + 0{,}1/4)^{(3*4)} - 1]/0.1 = 34{,}489$ млн. руб.

Рента р-срочная, $p \geq 1$, $m \geq 1$. Это самый общий случай р-срочной ренты с начислением процентов m раз в году, причем, возможно $p \neq m$.

Общее количество членов ренты равно пр, величина члена ренты R/p. Члены ренты с начисленными процентами образуют ряд, соответствующий геометрической прогрессии с первым членом R/p и знаменателем $(1+j/m)^{m/p}$. Сумма членов такой прогрессии составит

$$S=\frac{R}{p}\cdot\frac{(1+j/m)^{(m/p)np}-1}{(1+j/m)^{m/p}-1}=R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{p((1+j/m)^{m/p}-1)} \quad (3.7)$$

Пример 18. В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого квартала поступают платежи (р = 4) равными долями из расчета 10 млн. руб. в год (т.е. по 10/4 млн. руб. в квартал), на которые ежемесячно (m = 12) начисляются проценты по сложной ставке в 10 % годовых. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Решение. По формуле (3.7) находим:

$$S = (10/4)\cdot[(1+0{,}1/4)^{3\cdot4}-1]/[(1+0{,}1/4)^{12/4}-1] = 34{,}5296 \text{ млн. руб.}$$

3. Формулы современной величины

Обычная годовая рента. Пусть член годовой ренты равен R, процентная ставка i, проценты начисляются один раз в конце года, срок ренты n. Тогда дисконтированная величина первого платежа равна: $R(1/(1+i))$.

Приведенная к началу ренты величина второго платежа равна $R(1/(1+i)^2)$ и т.д. В итоге приведенные величины образуют геометрическую прогрессию сумма которой равна:

$$A = R\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = Ra_{n;i} \tag{3.8}$$

где

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \tag{3.9}$$

коэффициент приведения ренты.

Как видим, коэффициент приведения ренты зависит только от двух параметров: срока ренты n и процентной ставки i.

Пример 19. В течение 3 лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по 10 млн. руб. Ежегодное дисконтирование производится по сложной процентной ставке в 10 % годовых. Определить современную стоимость ренты.

Решение. По формуле (3.8) находим:

A = 10 х [1- $(1 + 0,1)^{-3}$]/0,1 =24,868 млн. руб.

Годовая рента, начисление процентов m раз в году. Не будем выводить формулу для этого случая, а просто заменим в формуле (3.8) дисконтный множитель $(1 + i)^{-n}$ на эквивалентную величину $(1 + j/m)^{-mn}$, соответственно, i заменим на $(1 + j/m)^m$ — 1, после чего имеем:

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^m - 1} = Ra_{mn;j/m} \tag{3.10}$$

Рента р-срочная (m = 1). Если платежи производятся не один, а р раз в году, то коэффициенты приведения находятся так же, как это было сделано для годовой ренты. Только теперь размер платежа равен R/p, а число членов составит $n \cdot p$. Сумма дисконтированных платежей в этом случае равна

$$A == R\frac{1-(1+i)^{-n}}{p((1+i)^{1/p} - 1)} = Ra_{n;i}^{(p)} \tag{3.11}$$

Рента р-срочная (р = m). Число членов ренты здесь равно числу начислений процентов; величина члена ренты составляет R/m . В итоге

$$A = \frac{R}{m}\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j/m} = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j} \tag{3.12}$$

Рента р-срочная (р ≠ m). Сумма членов соответствующей прогрессии в этом случае составит:

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p((1+j/m)^{m/p} - 1)} = Ra_{mn;j/m}^{(p)} \tag{3.13}$$

4. Определение параметров постоянных рент постнумерандо

Как было показано выше, постоянная рента описывается набором основных параметров — R, n, i и дополнительными параметрами p, n. Однако при разработке контрактов и условий финансовых операций могут возникнуть случаи, когда задается одна из двух обобщающих характеристик — S или A, и необходимо рассчитать значение недостающего параметра.

Определение размера члена ренты. Исходные условия: задается S или A и набор параметров, кроме R. Например, за обусловленное число лет необходимо создать фонд в сумме S путем систематических постоянных взносов. Если рента годовая, постнумерандо, с ежегодным начислением процентов, то, обратившись к (3.1), получим

$$R = \frac{S}{s_{n;i}} \tag{3.14}$$

Пусть теперь условиями договора задана современная стоимость ренты. Если рента годовая *(m* = 1), то из (3.8) следует

$$R = \frac{A}{a_{n;i}} \tag{3.15}$$

Таким образом, если ставится задача накопить за определенный срок некоторую сумму S, то прибегают к формуле (3.14), если же речь идет о погашении задолженности в сумме A, то следует воспользоваться (3.15).

Аналогичным образом можно определить R и для других условий ренты.

Пример 20. Семья через 6 лет собирается купить дачу за 120000 руб. Какую сумму (одинаковую) ей нужно вносить каждый год в банк, если годовая ставка процента в банке 8 % годовых.

Решение. По формуле (3.14) находим:

$$R = \frac{S}{s_{n;i}} = \frac{120000}{s_{6;8}} = \frac{120000}{7{,}335929} = 16357{,}85\,\text{руб.}$$

где $s_{6;8} = 7{,}335929$ – коэффициент наращения годовой ренты, определенный по таблице.

Расчет срока ренты. При разработке условий контракта иногда возникает необходимость в определении срока ренты и, соответственно, числа членов ренты. Решая полученные выше выражения, определяющие S или A, относительно n, получим искомые величины. Так, для годовой ренты постнумерандо с ежегодным начислением процентов находим

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)}, \quad n = \frac{\ln\left(1 - \frac{A}{R}i\right)^{-1}}{\ln(1+i)}. \tag{3.16}$$

Аналогичным образом можно определить сроки и для других видов рент.

Пример 21. Какой необходим срок для накопления 5 млн. руб. при условии, что ежегодно вносится по 1 млн. руб., а на накопления начисляются проценты по ставке 12 % годовых?

Решение. По формуле (3.16) находим:

$$n = \frac{\ln\left[\frac{5}{1}0{,}12 + 1\right]}{\ln 1{,}12} = 4{,}1472\,\text{года}$$

Если срок округляется до 5 лет, то необходимо несколько уменьшить размер члена ренты, т.е. найти член ренты для n = 5. В этом случае ежемесячный взнос должен составить

$$R = \frac{S}{s_{n;i}} = S\left(\frac{(1+i)^n - 1}{i}\right)^{-1} = 5\left(\frac{(1+0{,}12)^5 - 1}{0{,}12}\right)^{-1} = 0{,}787\ \text{тыс.руб.}$$

5. Конверсии рент

Виды конверсии. В практике иногда сталкиваются со случаями, когда на этапе разработки условий контракта или даже в ходе его выполнения необходимо в силу каких-либо причин изменить условия выплаты ренты. Иначе говоря, речь идет о *конвертировании условий, предусматриваемых при выплате финансовой ренты.* Простейшими случаями конверсии являются: замена ренты разовым платежом ***(выкуп ренты)***. К более сложному случаю относится объединение нескольких рент с разными характеристиками в одну — ***консолидация рент***. Общий случай конверсии — замена ренты с одними условиями на ренту с другими условиями, например, немедленной ренты на отложенную, годовой — на ежеквартальную и т.д. Ясно, что все перечисленные изменения не могут быть произвольными. Если предполагается, что конверсия не должна приводить к изменению финансовых последствий для каждой из участвующих сторон, то конверсия должна основываться на принципе финансовой эквивалентности.

Конверсия рент широко применяется при *реструктурировании задолженности.* Как известно, при этом нередко условия погашения долга смягчаются, однако принцип эквивалентности соблюдается и в этих случаях, обычно, правда, в урезанном, если так можно сказать, виде. Обсудим несколько основных случаев конверсии рент.

Выкуп ренты. Этот вид конверсии сводится к замене ренты единовременным платежом. Решение проблемы здесь очень простое. ***Искомый размер выкупа должен быть равен современной стоимости выкупаемой ренты.*** Для решения задачи в зависимости от условий погашения задолженности выбирается та или иная формула расчета современной стоимости потока платежей. Естественно, что применяемая при расчете современной стоимости процентная ставка должна удовлетворять обе участвующие стороны.

Объединение (консолидация) рент. Объединение рент, очевидно, заключается в замене нескольких рент одной, параметры которой необходимо определить. В этом случае из принципа финансовой эквивалентности следует равенство современных стоимостей заменяющей и заменяемых (консолидированных) рент. Т.е. ренты объединяют и заменяют по следующему правилу: находят современные стоимости рент слагаемых и складывают их, а затем подбирают ренту-сумму с такой же современной стоимостью и необходимыми другими параметрами.

$$A = \sum_k A_k \tag{3.17}$$

где A — современная стоимость заменяющей ренты, A_k — современная стоимость k-й заменяемой ренты.

Объединяемые ренты могут быть любыми: немедленными и отсроченными, годовыми и p-срочными и т.д. Что касается заменяющей ренты, то следует четко определить ее вид и все параметры, кроме одного. Далее, для получения строгого баланса условий, необходимо рассчитать размер неизвестного параметра, исходя из равенства (3.17). Обычно в качестве неизвестного параметра принимается член ренты или ее срок. Так, если заменяющая рента постнумерандо является немедленной и задан ее срок n, то из (3.17) следует

$$R = \frac{\sum A_k}{a_{n;i}} \tag{3.18}$$

В свою очередь, если задается сумма платежа (размер члена заменяющей ренты) и его периодичность, то отыскивается срок новой ренты. Обычно задача сводится к расчету n по заданному значению $a_{n;i}$. Необходимая для расчета величина коэффициента приведения определяется условиями задачи. Для немедленной ренты постнумерандо имеем

$$a_{n;i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \frac{\sum A_k}{R} \tag{3.19}$$

Если $\sum A_k$ известно, то, определив на основе (3.19) величину n, получим

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{\sum A_k}{R} i\right)}{\ln(1+i)} \tag{3.20}$$

Как видим, для того чтобы задача имела решение, необходимо соблюдать условие:

$$\frac{i\sum A_k}{R} < 1$$

Пример 22. Необходимо заменить годовую ренту постнумерандо с годовым платежом $R_1 = 600$ тыс.руб. и длительностью $n_1 = 10$ лет семилетней ($n_2 = 7$ лет) рентой. Ставка процента $i = 8$ % годовых.

Решение. Неизвестный член заменяющей ренты R_2 найдем из условия равенства современных стоимостей рент: $R_1 a_{10;8} = R_2 a_{7;8}$. Откуда $R_2 = \frac{600 a_{10;8}}{a_{7;8}} = \frac{600 \cdot 6{,}71}{5{,}206} = 773{,}34$ тыс.руб.

Пример 23. Заменить две ренты постнумерандо одной: n_1 = 5 лет, R_1 = 1 млн. руб., n_2 = 8 лет, R_1 = 0,8 млн. руб., i = 8 %.

Решение. Находим современные стоимости рент-слагаемых:

$$A_1 = 1 \cdot a_{5;8} = 1 \cdot 3{,}9927 = 3{,}9927 \text{ млн.руб}$$

$$A_2 = 0{,}8 \cdot a_{8;8} = 0{,}8 \cdot 5{,}7466 = 4{,}5973 \text{ млн.руб}$$

Современная стоимость ренты-суммы A = 3,9927 + 4,5973 = 8,59 млн. руб.

Подберем ренту-сумму, задав либо длительность ренты, либо годовой платеж.

Зададим n = 10 лет при i = 8 %.

Тогда $R = \frac{A}{a_{10;8}} = \frac{8{,}59}{6{,}71} = 1{,}280$ млн.руб.

Зададим годовой платеж R = 1 млн.руб. при i = 8 %. Тогда по (3.20)

$$n = \frac{-\ln\left(1 - \frac{A}{R} i\right)}{\ln(1+i)} = \frac{-\ln\left(1 - \frac{8{,}59}{1} 0{,}08\right)}{\ln(1+0{,}08)} = 15{,}16 \text{ лет.}$$

Планирование погашения долгосрочной задолженности

Одна из задач количественного финансового анализа долгосрочной задолженности (далее для краткости любой вид долгосрочного долга будем называть займом или долгом) — разработка плана погашения займа, адекватного условиям финансового соглашения.

Разработка плана погашения займа заключается в составлении графика (расписания) периодических платежей должника. Такие расходы должника обычно называют ***расходами по обслуживанию долга*** или, более кратко, ***срочными уплатами, расходами по займу.***

Расходы по обслуживанию долга включают две составляющие: 1) текущие процентные платежи, 2) средства, предназначенные для погашения основного долга.

Обычно на практике используют несколько схем погашения долга.

1. Погашение долга одним платежом

Один из способов погашения долга – одним платежом в конце срока в виде разового платежа.

Погашение займа одним платежом в конце срока. Пусть D – заем, выданный на n лет под g сложных годовых процентов. К концу n-го года наращенная его величина составит $D(1+g)^n$. Если предполагается отдать заем одним платежом в конце срока, то это и будет размер данного платежа. Таким образом, размер срочной уплаты будет:

$$Y = D(1+g)^n \tag{4.1}$$

Пример 24. В банке взят кредит размером 1000 тыс. руб. на 5 лет под 10 % годовых. Рассчитать план погашения кредита для случая погашения кредита одним платежом:

Решение. Размер срочной уплаты составит:

$$Y = 1000(1 + 0{,}1)^5 = 1610{,}51 \text{ тыс. руб.}$$

2. Погашение основного долга одним платежом в конце срока

Возможна другая схема погашения займа, когда в конце срока выплачивается основной долг, а ежегодно уплачиваются проценты.

Проценты за первый год составят I = Dg. Если их выплатить, то останется снова только основной долг в размере D. Таким образом, размер срочной уплаты составит:

$$Y_1 = Y_2 = ... = Y_{n-1} = Dg \tag{4.3}$$

В конце n-го года величина выплаты составит:

$$Y_n = D \cdot g + D \tag{4.4}$$

Т.е. процентные деньги за последний год и основной долг.

Пример 25. В банке взят кредит размером 1000 тыс. руб. на 5 лет под 10 % годовых. Рассчитать план погашения кредита для случая погашения основного долга одним платежом в конце срока.

Решение. Размер срочных уплат составит:

$Y_{1\text{-}4} = 1000 \cdot 0{,}1 = 100$ тыс. руб.

$Y_5 = 1000 \cdot 0{,}1 + 1000 = 1100$ тыс. руб.

3. Погашение долга в рассрочку

В практической финансовой деятельности, особенно при значительных размерах задолженности, долг обычно погашается в рассрочку, частями. Такой метод погашения часто называют ***амортизацией долга.*** Он осуществляется различными способами:

— погашением *основного долга* равными суммами (равными долями),

— погашением *всей задолженности* равными или переменными суммами по обслуживанию долга.

Погашение основного долга равными выплатами. Пусть долг в сумме D погашается в течение n лет. В этом случае сумма, ежегодно идущая на его погашение, составит $d = D/n$

Размер долга последовательно сокращается: D, D — d, D — 2d и т.д.. Соответствующим образом уменьшаются и выплачиваемые проценты, так как они начисляются на остаток долга. Пусть для простоты проценты выплачиваются раз в конце года по ставке g. Тогда за первый и последующие годы они равны Dg, (D — d)g, (D — 2d)g и т.д. Процентные платежи, как видим, образуют убывающую арифметическую прогрессию с первым членом Dg и разностью — dg.

Срочная уплата в конце первого года находится как

$$Y_1 = D_0 g + d \tag{4.5}$$

где $D_0 = D$ – сумма основного долга.

Для конца года t находим

$$Y_t = D_{t-1} g + d, \ t = 1, \ldots, n \tag{4.6}$$

где D_{t-1} — остаток долга на конец года t.

Остаток долга можно определять последовательно:

$$D_t = D_{t-1} \frac{n-1}{n} \tag{4.7}$$

Если долг погашается p раз в году постнумерандо и с такой же частотой выплачиваются проценты, каждый раз по ставке g/p, то срочная уплата составит:

$$Y_t = \frac{D_t g}{p} + \frac{D_0}{pn}, \ t = 1, \ldots, n \tag{4.8}$$

Остаток задолженности на конец года t в этом случае составит

$$D_t = D_{t-1} \frac{pn-1}{pn} \tag{4.9}$$

Пример 26. Долг в сумме D = 1000 тыс. руб. необходимо погасить последовательными равными суммами за n = 5 лет платежами постнумерандо. За заем выплачиваются проценты по ставке g = 10 % годовых.

Решение. Размер погашения основного долга 1000 / 5 = 200 тыс. руб. в год Ежегодные процентные платежи составят: 1000 · 0,1 = 100; (1000 - 200) · 0,1 = 80 и т.д План погашения представлен в следующей таблице

Год	Остаток долга на начало года	Расходы по займу	Погашение долга	Проценты
1	1000	300	200	100
2	800	280	200	80
3	600	260	200	60
4	400	240	200	40
5	200	220	200	20

Как видим, со временем уменьшаются не только суммы расходов по займу, но и соотношения процентов и сумм погашения основного долга.

Погашение кредита равными срочными уплатами. В соответствии с этим методом расходы должника по обслуживанию долга постоянны на протяжении всего срока его погашения. Из общей суммы расходов должника часть выделяется на уплату процентов, остаток идет на погашение основного долга. Так же как и при предыдущем методе, величина долга здесь последовательно сокращается, в связи с этим уменьшаются процентные платежи и увеличиваются платежи по погашению основного долга. По определению

$$Y = D_{t-1}g + R_t = \text{const} \tag{4.10}$$

План погашения обычно разрабатывается при условии, что задается срок погашения долга.

Первый этап разработки плана погашения — определение размера срочной уплаты. Далее полученная величина разбивается на процентные платежи и сумму, идущую на погашение основного долга. После чего легко найти остаток задолженности.

Периодическая выплата постоянной суммы Y равнозначна ренте с заданными параметрами. Приравняв сумму долга к современной величине этой ренты, находим

$$D = Ya_{n;g} \Rightarrow Y = D / a_{n;g} \tag{4.11}$$

где $a_{n;g}$ — коэффициент приведения годовой ренты со ставкой g и сроком n..

Все величины, необходимые для разработки плана, можно рассчитать на основе величины Y и данных финансового контракта. Найдем сумму первого погасительного платежа (платежа, на обслуживание основного долга). По определению

$$d_1 = Y - Dg$$

Сумма второго платежа:

$$d_2 = Y - (D - d_1)g = (d_1 + Dg) - (D - d_1)g = d_1(1 + g)$$

Сумма платежа после года t:

$$d_t = d_{t-1}(1 + g) \tag{4.12}$$

Суммы, идущие на погашение долга, увеличиваются во времени, в связи с этим рассматриваемый метод погашения называют ***прогрессивным.*** Платежи по погашению основного долга образуют ряд d_1, $d_1(1+g)$, …, $d_1(1+g)^{n-1}$.

По этим данным легко определить сумму погашенной задолженности (основного долга) на конец года t после очередной выплаты:

$$W_t = \sum_{k=0}^{t-1} d_1(1 + g)^k = d_1 s_{t;g} \tag{4.13}$$

где $s_{t;g}$ — коэффициент наращения постоянной ренты постнумерандо.

Пример 27. Условия погашения займа те же, что и в примере 26. Однако погашение производится равными срочными уплатами, т.е. рентой постнумерандо с параметрами: Y (неизвестная величина), n = 5, g = 10%.

Решение. Находим: $a_{5;10}$ = 3,790787. После чего

$Y = \frac{1000}{3,79079}$ = 263,797 тыс. руб. Далее определим сумму первого погасительного платежа: d_1 = 263,797 – 1000 · 0,1 = 163,797 тыс. руб.

и остаток долга после первого погашения: D_1 = 1000 - 163,797 = 836,203 тыс. руб.

План погашения долга представлен в таблице.

Год	Остаток долга на начало года	Расходы по займу	Проценты	Погашение долга
1	1000,000	263,797	100,000	163,797
2	836,203	263,797	83,620	80,177
3	656,026	263,797	65,603	198,195
4	457,831	263,797	45,783	218,014
5	239,816	63,797	23,982	239,816

Процентные платежи уменьшаются во времени, а суммы погашения основного долга систематически увеличиваются. Продолжим пример. Допустим, необходимо найти сумму погашенного долга на конец третьего года погашения при условии, что план погашения не разработан. Для решения воспользуемся формулой (4.13). Находим $s_{3;10}$ = 3,31, сумма первого платежа определена выше – d_1 = 163,794, таким образом,

$$W_3 = 163,794 \cdot 3,31 = 542,169 \text{ тыс. руб.}$$

Переменные расходы по займу. Далеко не всегда оказывается удобным условие Y = const. Например, погашение долга может быть связано с поступлением средств из каких-либо источников, и зависеть от ряда обстоятельств. Срочные уплаты в этом случае образуют ряд, члены которого либо задаются заранее (график погашения), либо следуют какому-либо формальному закону (прогрессии, заданной функции).

В ряде случаев размеры срочной уплаты связываются с ожидаемыми поступлениями средств и задаются заранее в виде графика погашения. Размер последней срочной уплаты не задается. Она определяется как сумма остатка долга на начало последнего периода.

Пример 28. Долг в размере 100 000 руб. решено погасить по специальному графику за четыре года — суммы расходов по погашению долга по годам 40, 20 и 30 тыс. руб. Остаток выплачивается в конце четвертого года. План погашения имеет следующий вид при условии, что ставка процента по долгу установлена на уровне 10 % (см. таблицу).

Год	Остаток долга на начало года	Расходы по займу	Проценты	Погашение долга
1	100 000	40000	10000	30000
2	70000	20000	7000	13000
3	57000	30000	5700	24300
4	32700	35970	3270	32700

5. Контрольные задания

1. Банк выдал ссуду, размером P руб. Дата выдачи ссуды – $T_н$ возврата - $T_к$. День выдачи и день возврата считать за 1 день. Проценты рассчитываются по простой процентной ставке i % годовых. Найти:

1) точные проценты с точным числом дней ссуды;
2) обыкновенные проценты с точным числом дней ссуды;
3) обыкновенные проценты с приближенным числом дней ссуды.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	5000	6000	7000	8000	9000	4000	3000	2000	5000	6000
$T_н$	21.01.05	18.01.05	17.01.05	16.01.05	15.01.05	14.01.05	11.01.05	10.01.05	09.01.05	08.01.05
$T_к$	11.03.05	12.03.05	13.03.05	14.03.05	15.01.05	18.03.05	19.03.05	20.03.05	21.03.05	22.03.05
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

2. Через t дней после подписания договора должник уплатит S руб. Кредит выдан под i % годовых (проценты обыкновенные). Какова первоначальная сумма и дисконт?

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
t	180	150	120	120	150	130	110	100	90	90
S	5000	6000	7000	8000	9000	4000	3000	2000	5000	6000

3**.** Через t дней предприятие должно получить по векселю S руб. Банк приобрел этот вексель с дисконтом. Банк учел вексель по простой учетной ставке d % годовых (год равен 360 дням). Определить полученную предприятием сумму и дисконт.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
t	180	150	120	120	150	130	110	100	90	90
S	5000	6000	7000	8000	9000	4000	3000	2000	5000	6000

4. В кредитном договоре на сумму *P* руб. и сроком на n дней, зафиксирована ставка сложных процентов, равная i % годовых. Определить наращенную сумму.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	5000	6000	7000	8000	9000	4000	3000	2000	5000	6000
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
n	180	150	120	120	150	130	110	100	90	90

5. Ссуда, размером P руб. предоставлена на n лет. Проценты сложные, ставка – i % годовых. Проценты начисляются m раз в году. Вычислить наращенную сумму.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P	5000	6000	7000	8000	9000	4000	3000	2000	5000	6000
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
n	5	4	6	3	8	3	4	2	6	5
m	3	4	2	4	3	2	3	4	6	2

6. Вычислить эффективную ставку процента, если банк начисляет проценты *m* раз в году, исходя из номинальной ставки j % годовых.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	2	4	6	2	4	6	2	4	6	2
j	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

7. Определить, какой должна быть номинальная ставка при начислении процентов *m* раз в году, чтобы обеспечить эффективную ставку i % годовых.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
m	2	4	6	2	4	6	2	4	6	2
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

8. Предполагаемый темп инфляции α % в год. Какую ставку сложных процентов нужно поставить в контракте, если желательна реальная доходность i %?

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
α	3	4	5	6	7	3	4	5	6	7
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

9. Через n лет предприятию будет выплачена сумма S руб. Определить ее современную стоимость при условии, что применяется сложная процентная ставка i % годовых.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	5000	6000	7000	8000	9000	4000	3000	2000	5000	6000
i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
n	4	5	3	7	5	3	2	4	6	3

10. Через n лет по векселю должна быть выплачена сумма S руб. Банк учел вексель по сложной учетной ставке d % годовых. Определить дисконт.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
d	10	11	12	8	7	6	5	6	7	8
n	2	3	4	5	6	5	4	3	2	3
S	5000	6000	7000	8000	9000	4000	3000	2000	5000	6000

11. В течение n лет на расчетный счет в конце каждого года поступает по R руб., на которые m раз в году начисляются проценты по сложной годовой ставке j %. Определить сумму на расчетном счете к концу указанного срока.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
R	5000	6000	7000	8000	9000	4000	3000	2000	5000	6000
j	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
n	6	5	7	4	8	5	8	6	4	6
m	2	4	6	2	4	6	2	4	6	2

12. Семья собирается за n лет накопить сумму S денежных единиц. Чему должен быть равен единичный взнос в банк, если взносы делаются m раз в году и на них m раз в год начисляются сложные проценты по ставке j % годовых?

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S	5000	6000	7000	8000	9000	4000	3000	2000	5000	6000
j	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
n	5	4	6	4	3	7	5	6	4	3
m	2	4	6	2	4	6	2	4	6	2

13. Заменить две ренты длительностью n_1 и n_2 с годовыми платежами R_1 и R_2 и процентной ставкой i одной годовой рентой длительностью n с той же процентной ставкой. Определить годовой платеж и наращенную величину ренты.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_1	5	6	7	4	5	4	6	4	5	7
n_2	7	8	8	5	6	7	8	6	8	8
R_1	200	100	300	300	100	300	500	300	500	200
R_2	500	200	200	400	150	200	300	400	200	400
i	5	6	7	8	9	5	6	7	8	9
n	10	9	5	9	7	10	7	8	7	10

14. В банке взят кредит размером D денежных единиц на n лет под i % годовых. Рассчитать план погашения кредита для различных схем:

- погашение основного долга одним платежом;
- погашение основного долга равными годовыми выплатами;
- погашение кредита равными годовыми выплатами.

Вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	5000	6000	7000	8000	9000	4000	3000	2000	5000	6000
n	7	6	5	4	5	6	7	6	5	4
i	8	8	9	9	10	10	9	9	8	8

Литература

1. Чуйко А. С. Финансовая математика: Учебное пособие / А.С. Чуйко, В.Г. Шершнев. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 160 с. http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=356853

2. Копнова, Е. Д. Основы финансовой математики [Электронный ресурс] : учеб. пособие / Е. Д. Копнова. - М.: Московский финансово-промышленный университет «Синергия», 2012. http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=451174

3. Брусов П. Н. Справочник по финансовой математике: Учебное пособие / П.Н. Брусов, Т.В. Филатова, Н.П. Орехова. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 239 с. http://znanium.com/catalog.php?item=bookinfo&book=448148

4. Финансовая математика ЕН.02: методические указания для обучающихся к практическим занятиям и самостоятельной работе для специальности 38.02.06 Финансы/ Сост. Ю.В. Киреев. - Воронеж: АОНО ВО «ИММиФ», 2015. - 20 с.