АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ
«Колледж информационных технологий и финансов»
(АН ПОО «Колледж информационных технологий и финансов»)

УТВЕРЖДАЮ

Директор ____________ **Винокурова И.В.**

«20» декабря 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ
И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ ПО УЧЕБНОМУ ПРЕДМЕТУ

ПД.01 Математика
(индекс и наименование учебного предмета)

38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)
(код и наименование специальности)

Квалификация выпускника Бухгалтер
(наименование квалификации)

Уровень базового образования обучающихся – основное общее образование

Воронеж
2017

СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка

Методические указания разработаны в соответствии с программой подготовки специалистов среднего звена по специальностям среднего профессионального образования (СПО) 38.02.07 Банковское дело.

На занятиях по математике в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом СПО должны быть сформированы общие компетенции, включающие в себя способности организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество, а также профессиональные компетенции в соответствии со специальностью студента.

В результате освоения учебной дисциплины Математика студент должен

знать:

- значение математической науки для решения задач, возникающих в теории и практике; широту и в то же время ограниченность применения математических методов к анализу и исследованию процессов и явлений в природе и обществе;
- значение практики и вопросов, возникающих в самой математике для формирования и развития математической науки; историю развития понятия числа, создания математического анализа, возникновения и развития геометрии;
- универсальный характер законов логики математических рассуждений, их применимость во всех областях человеческой деятельности;
- вероятностный характер различных процессов окружающего мира.

использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни:

- для практических расчетов по формулам, включая формулы, содержащие степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции, используя при необходимости справочные материалы и простейшие вычислительные устройства;
- для описания с помощью функций различных зависимостей, представления их графически, интерпретации графиков;
- решения прикладных задач, в том числе социально-экономических и физических, на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение скорости и ускорения;
- для построения и исследования простейших математических моделей;

- для анализа реальных числовых данных, представленных в виде диаграмм, графиков;
- анализа информации статистического характера;
- для исследования (моделирования) несложных практических ситуаций на основе изученных формул и свойств фигур;
- для нахождения объемов и площадей поверхностей пространственных тел при решении практических задач, используя при необходимости справочники и вычислительные устройства.

Данные методические указания направлены на оказание помощи студентам отделения СПО в выполнении практических работ и в организации их самостоятельной работы по овладению системой знаний, умений и навыков, компетенций в объеме действующей программы дисциплины «Математика».

Методические указания содержат практические советы по решению задач по математике, требования к оформлению выполненных заданий, вопросы для самопроверки. Представлены конкретные темы курса с краткими теоретическими сведениями и формулами, а также подробные решения типовых примеров и задач. Имеется большое количество заданий для самостоятельного решения.

Общие методические указания

Практические советы студентам

Для успешного овладения программой курса необходимо выполнять все виды работ: посещение лекционных и практических занятий, самостоятельная работа с учебниками и учебными пособиями, систематическое выполнение домашних заданий (контрольных работ), решение задач.

Конспекты по математике главным образом должны содержать определения, формулировки теорем, чертежи, выводы основных формул. Записи следует вести аккуратно, чтобы впоследствии ими пользоваться, широко применять математическую символику, что позволяет сэкономить время и сделать записи более компактными. Следует применять различные приемы, облегчающие пользование записями: оставлять поля и свободные строки для примечаний; выделять цветом важные места, заключать основные формулы в рамки.

Придерживайтесь правила: учебник нужно не просто читать, а изучать; основой запоминания является понимание. Повторение - важнейшее средство, предотвращающее забывание; необходимо выработать привычку систематической самостоятельной работы, «натаскивание» к экзамену дает слабые и поверхностные знания.

Решение задач является лучшим способом закрепления материала. Конечно, единого алгоритма решения разнообразных задач не существует, однако можно придерживаться следующих рекомендаций:

1. Величины, данные в условии задачи, необходимо перевести в одну систему единиц; нарушение этого правила является распространенным источником ошибок.
2. Внимательно изучите цель, поставленную в задаче; выявите, какие теоретические положения связаны с данной задачей в целом или с некоторыми ее элементами.
3. Обдумайте условие задачи, проанализируйте ее, найдите план решения.
4. Попытайтесь соотнести данную задачу к какому-либо типу задач, способ решения которых вам известен.
5. Если не видно сразу хода решения, то последовательно отвечайте на вопросы: что дано; что нужно найти; достаточно ли данных, чтобы найти неизвестное, и т. п.
6. Попробуйте расчленить данную задачу на серию вспомогательных, последовательное решение которых может составить решение данной задачи.
7. Найдя план решения, выполните его, убедитесь в необходимости и правильности каждого шага, произведите проверку решения и, если нужно, его исследование.
8. Подумайте, нельзя ли было решить задачу иначе; известно, что одна и та же задача может иметь несколько решений, поэтому следует выделить наиболее рациональное.
9. Если решить задачу не удается, отыщите в учебной литературе уже решенную задачу, похожую на данную, изучите внимательно это готовое решение и постарайтесь извлечь из него пользу для решения своей задачи.
10. При решении задач следует обосновать каждый шаг решения, исходя из теоретических основ курса. Не следует применять формулы, которые не входят в программу. Решение должно быть доведено до окончательного ответа.

Самопроверка. После изучения определенной темы и решения достаточного количества задач студенту рекомендуется воспроизвести по памяти определения, формулы и формулировки теорем, проверяя себя по учебнику и конспектам и ответить на вопросы, тестовые задания и задачи для самопроверки. В случае необходимости надо еще раз внимательно разобраться в материале учебника, дополнительно решить задачи. Важным критерием усвоения теории является умение решать задачи на пройденный материал.

Раздел 1. Алгебра

Введение. Место и роль математики в современном мире.

Литература: [4, с. 4-10]

Вопросы и упражнения: [1, с. 11]

Пр. р. №1-2. ***Решение прикладных задач методом математического моделирования.***

Задание 1. Изучите теоретические положения темы.

Математическое моделирование как действенный способ познания действительности

Понятие о математических моделях

Модель в общем виде определяют как условный образ реального объекта (процесса), который создается для более глубокого изучения действительности. Необходимость моделирования обусловлена сложностью, а порой и невозможностью прямого изучения реального объекта (процесса), так как существуют сферы человеческой деятельности, где проведение экспериментов и получение на их основе результатов принципиально невозможно. Значительно доступнее создавать и изучать прообразы объектов или процессов, т.е. модели.

Именно так математика изучает физические, химические, биологические, социальные явления - не непосредственно, а путем исследования математических моделей этих явлений, являясь мощным инструментом познания реального мира.

Предложим одно из определений математической модели:

Математическая модель - это приближенное описание какого-либо явления внешнего мира, выраженное с помощью математической символики и заменяющее изучение этого явления исследованием и решением математических задач.

Изучение явлений с помощью математических моделей называется математическим моделированием.

Этапы математического моделирования Рассмотрение различных подходов к описанию, построению и анализу ма тематических моделей позволяет выделить следующие основные **этапы математического моделирования** при решении различных задач:

I этап. Формулировка проблемы, возникшей в производстве или при реализации продукции. Определение ее входных и выходных параметров. Определение параметров, которые заданы, и тех, которые надо определить.

II этап. Выделение «существенных» факторов, называемых аргументами, и «несущественных» факторов, которыми в дальнейшем рассмотрении пренебрегают.

III этап. Аргументы, входные и выходные параметры интерпретируются на языке непрерывной или дискретной математики, т. е. на языке чисел, функций, алгебраических или дифференциальных уравнений, неравенств, систем, комбинаторики, логических схем, теории графов и т. д.

IV этап. На этом этапе происходит формализация упрощенной проблемы: на математическом языке записываются связи между аргументами, входными и выходными параметрами. Исследование исходной (упрощенной) проблемы сводится к решению и исследованию возникших математических задач, которые и образуют ***математическую модель изучаемой проблемы.***

V этап. Решение и исследование задач, возникших на предыдущем этапе. Рассмотрение упрощенной проблемы позволяет воспользоваться как многообразием математических методов, так и мощью современных компьютеров. Здесь же происходит определение границ применимости построенных моделей.

VI этап. Изучение полученных результатов, их сравнение с известными фактами.

VII этап. На этом этапе происходит уточнение модели путем учета части «несущественных» свойств и их переход в разряд существенных, после этого происходит переход к этапу II и процесс циклически повторяется. Таким образом, мы переходим к системе, иерархии моделей, каждая из которых описывает изучаемую проблему глубже, полнее, всестороннее.

Моделирование в экономике, коммерции, маркетинге

Математические методы с успехом используются сегодня практически во всех сферах человеческой деятельности и научного знания.

Экономика как наука об объективных причинах функционирования и развития общества еще со Средних веков пользуется разнообразными количественными характеристиками, а потому вобрала в себя большое число математических методов. Так, современный бухгалтерский учет основан на принципах, изложенных еще в 1494 г. в фундаментальном труде Луки Пачоли «Сумма арифметики, геометрии, учении о пропорциях и отношениях», в котором часть I, отдел 9, представляет трактат XI «О счетах и записях». Современная экономика использует методы, разработанные в XX в. Л.В. Канторовичем, В.В. Леонтьевым, Е.Е. Слуцким.

Продолжающееся успешное проникновение математических методов в экономические проблемы обеспечивается созданием новых математических методов, широким применением современных компьютеров и взаимодействием теоретических и вычислительных методов.

Так, при проведении маркетинговых исследований, необходимых для успешной работы на рынке в условиях конкуренции, активно применяются экономико-математические методы, основанные на математическом моделиро вании изучаемых объектов с целью прогнозирования будущего состояния, оптимизации решений и установления причинно-следственных связей. Например, при проведении маркетинговых исследований анализируются взаимосвязь уровня дохода на одного члены семьи с покупкой продукции конкретного вида, имиджем качества продукции компании с ее местом на рынке, затрат на рекламу с объемом продаж товара и т.д.

Большинство важнейших понятий экономики, маркетинга, финансов является, по существу, конкретными примерами стандартных понятий математического анализа, таких как функция, производная, логарифмическая производная и т.п.

Многочисленные примеры и задачи экономического содержания, взятые из разных сфер бизнеса и управления, успешно решаются методом математического моделирования, который является мостиком, связывающим абстрактные понятия математики с конкретными понятиями из различных экономических дисциплин (экономика, бухгалтерский учет, финансы, страховое дело, маркетинг, коммерческая деятельность и т.п.).

Задание 2. Напишите эссе на тему «Значение математике в профессиональной деятельности».

Задание 3. Изучите решение задачи [4, с. 8-10].

Задание 4. Пример задачи, решенной методом математического моделирования.

Рабочий день уменьшился с 8 до 7 часов. На сколько процентов нужно повысить производительность труда, чтобы при тех же расценках заработная плата возросла на 5%?

Решение. Составим математическую модель задачи:

Пусть производительность труда составляла x единиц продукции в час. Тогда за 8 часов можно произвести (8x) единиц продукции. Пусть расценка составляет у ден. ед. за единицу продукции, тогда заработная плата (8лу) ден. ед. Так как расценки не меняются, а заработная плата должна увеличиться на 5%, тогда новая заработная плата должна составить $8xy +$ ■ 5 = 8,4xy (ден. ед.)

Значит, при тех же расценках надо делать за смену = 8,4x единиц продук

ции, а за 1 час $= \frac{8,4x}{}$ 1,2x единиц вместо x единиц. Значит, разница составит = 0,2 = 20% от прежней производительности труда.

1,25-5

Ответ: производительность труда следует повысить на 20%.

Задание 5. Решите задачи самостоятельно:

1) [4,с.11(1.1,1.2)].

2) Стоимость 60 экземпляров первого тома и 75 экземпляров второго тома выпуска составляют 270 тыс. руб. В действительности за книги уплачено только 237 тыс. руб., так как проведена скидка на первый том в размере 15%, на второй - 10%. Какова первоначальная цена этих книг?

3) Двум машинисткам поручена работа, оплата которой составляет всего 2500 руб., причем первая машинистка будет печатать текст, а другая таблицы. Страниц текста в 2,5 раза больше, чем страниц таблиц, но страница таблиц оплачивается на 66-|% дороже страницы текста. Сколько денег получит каждая машинистка?

Тема 1.1 Развитие понятия о числе

Литература: [1, с.5-23]

Пр. р. №3. ***Практические приемы вычислений с приближенными данными.*** **Задание 1.** Изучите теоретические положения темы.

Задание 2. Выполните упражнения:

1) Вычислить: а) $x = \frac{1{,}9 \cdot 6{,}3 \cdot 3{,}05}{5{,}3 \cdot 125}$; б) $x = \frac{10{,}85^2 \cdot \sqrt[3]{5{,}35}}{\sqrt{0{,}825}}$

2) Вопросы и упражнения: [1, с. 8-9 №1, 2, 4,5];

3) Вопросы и упражнения: [1,с. 12-13]

Тема 1.2 Корни, степени и логарифмы

Литература: [1, с. 24-37]

Пр. р. №4. ***Выполнение тождественных преобразований над степенными выражениями.***

Задание 1. Повторите правила действий со степенями.

Задание 2. Выполните упражнения:

1. Вычислить: (-) 1/2-25 1 2 -81 1 2-125 1/3;
4

3. Упростить выражение —==—=■
\a -\Ъ

4. Вопросы и упражнения: [1, с.30-31, с.34, с. 37-38]

а) $\left(\frac{(a+b)^2}{(a+b)^{-3}}\right)^{-4}$; б) $a^{3/4} : \sqrt[4]{a}$

2 Выполнить действия:

Пр. р. №5. ***Преобразование и вычисление значений логарифмических выражений.***

Задание 1. Повторите основное логарифмическое тождество, свойства логарифмов.

Задание 2. Выполните упражнения:

1. Вычислить: а)10^{3lg2}б) $log_{16}0,5$; в) ^{lo§2} ;
   log_2 л/16
2. Прологарифмировать выражение $x = a^3Ь^4$.
3. Найти х, если Igx = lg3 + lg5-lg2.

Тема 1.3 Основы тригонометрии

Литература: [1, с. 91-106]

Пр. р. №6. ***Нахождение значений тригонометрических функций с заданной степенью точности.***

Задание 1. Повторите основные формулы тригонометрии [1, с.91-100] **Задание 2.** Выполните упражнения:

1. Вычислить значения cos *a, tga, ctga*, если sin *a* = -0,6 и *a & (л\3л/* 2).;
2. Вопросы и упражнения [1, с.95, 101].

Пр. р. №7. ***Выполнение тождественных преобразований в тригонометрических выражениях.***

Задание 1. Повторите основные формулы тригонометрии [1, с. 101-106]; **Задание 2.** Выполните упражнения:

1. Упростить выражение:
   . Л . Л ЛЛ
   sin — sin —ь cos — cos —
   ------ —----- - ----- —----- —;
   . л . 2л л 2л
   sin — • sincos — • cos —
   5 15 5 15
2. Доказать тождество —— = cos *a* • cos /?;
   tga-tg/3
3. Вопросы и упражнения: [1,с. 106-107]

Тема 1.4 Функции, их свойства и графики

Литература: [1, с.120-138]

Пр. р. №8. ***Анализ графиков функций.***

Задание 1. Изучите [1, с. 120-123];

Задание 2. Выполните:

1. Вопросы и упражнения [1, с. 124];

2. Найдите область определения функций:

f O) = ~, g(*) = Vт-4, A(x) = - + .

3. Укажите нули функций:

$f(x) = x^2 - x$, $g(x) = (x + 3)(x - 1)(x + 7)$, $A(x) = \sin x$.

4. Проанализируйте графики, построенные другим студентом.

Пр. р. №9. ***Исследование функций и построение их графиков.***

Задание 1. Изучите схему исследования функции [1, с. 125-126];

Задание 2. Выполните:

1. Вопросы и упражнения [1, с. 128];

2. Исследуйте функцию и постройте ее график: а) $y = |x-1|$; б)

x^2 *-4,апёё х* > 2, *2-*
х,апёё х < 2;
; в) *у* = д/2х -2 .

Пр. р. №10. ***Построение графиков функций с помощью геометрических преобразований.***

Задание 1. Изучите [1, с. 129-136];

Задание 2. Выполните упражнения:

1. Вопросы и упражнения: [1, с. 132, с. 136].

2. Определить, какие функции являются четными, а какие - нечетными, если: $f(x) = \cos x$, $g(x) = x^2 + x^4$, $A(x) = x + \cos x$.

Задание 3. В одной и той же системе координат постройте графики функций: а) $y = x^2$;$y = x^2 +3$ $y = (x + 4)^2$; б) *у* = -, *у* = - + 2, *у* = -^—.
х х х-2

Пр. р. №11. ***Вычисление пределов функции.***

Задание 1. Повторите основные положения темы «Предел функции». **Понятие предела функции в точке. Теоремы о существовании предела функции. Основные теоремы о пределах.**

Пусть функция *у* = /(х) определена в окрестности точки Хо. Рассматривая ее значения для *х,* принадлежащих *8* -окрестности этой точки можно следить за тем, как они изменяются: если *8* неограниченно уменьшается и, значит, *х* неограниченно приближается x_0. Если при этом *f(x)* неограниченно приближается к некоторому числу *A,* то говорят, что *f(x)* имеет предел, равный А, при x^x_0, и записывают :

/(л) = *A*.

<u>Определение.</u> Число *A* называется пределом функции *f(x)* при x^x_0, если для любого числа *E* > 0 существует число *8* > 0, такое, что для всех *x* (кроме, возможно, $x = x_0$) из условия *x—XQ* < *8* следует (х)—Л| < £ •

<u>Смысл определения</u>: все значения функции *f(x)* оказываются в любой, наперед заданной *E* -окрестности точки *A,* если значения х берутся из достаточно малой *8* -окрестности точки x_0, выбор которой зависит от *E* . Или, другими словами, можно гарантировать любую близость значений функции *f(x) к* числу *A,* если ограничиваться рассмотрением только значений *x,* достаточно близких к x_0.

Сама точка x_0 при этом исключается из рассмотрения - это важное условие, позволяющее исследовать предельное поведение функции при *x* x_0 даже в тех случаях, когда функция не определена в *xo.*

<u>Геометрический смысл равенства</u> Цт /(т) = *A* состоит в том, что график ока-

зывается в любой сколь угодно узкой *E* -полосе прямой *y = A,* если *x* близко к x_0.

Вместо записи Нпт /(т) = *A* иногда пишут /(%) *A* при *x* x_0.

Пример 1.1. Рассмотрим Нт*^{2} Из свойств чисел ясно, что если х при-
x—>2
ближается к 2, то x^2 приближается к 4, т. е. указанный предел существует и равен
4. Но для строго формального доказательства следует убедиться, что неравенство |л'^{2} - 4| < *E* будет гарантировано для всех *x* из некоторой *8* -окрестности точки x_0 за счет малости *8*.

Имеем |л^2-4| = |т-2|-|л + 2|<£|л + 2|, если брать |я-2|<J. Поскольку выбор *8* >0 в нашем распоряжении. Договоримся в любом случае выбирать *8* <1. Так как 2-£<x<2 + £, то |л + 2| < 5и значит П^2 -4| < *58.*

Ясно, что выбирая *8* < , мы гарантируем требуемое неравенство |т^2 -4| < *E* .

Основные теоремы о пределах:

Теорема 1. Если Нт/А) существует, то он единственный.

Теорема 2. Пт^c = С *(C-const)*

lim№) ± Ат)]=Нт/ (*) ± НтАт);
x->a *x^a* *x^a*

Нт№) • Ат)] = Нт/ (*) • НтАт)

lim /0) /(x) limXO , если limXX * 0 x->a

Теорема 3. Если функция /(x)при x -+t/имеет конечный предел с + Ои существует предел функции /(x) Ф 0, то Hт№) ' X^x)] = ^c ' ПтX^x) •
x^a x^a

Замечательные пределы, lim— = 1" первый замечательный предел;

x—>0 %

Цт(1 + -)^x **=е, где** e **« 2,7182... - второй замечательный предел.**

Пример 1.2. Найти 2л + 7л + 6 x^2 / x^-2+ 4x + 4

Решение. Непосредственная подстановка x =-2показывает, что имеет место неопределенность вида 0/0. Разложив числитель на множители и сократив дробь,

находим hm л. 2x + 7x + 6 / x—>oo Л "т т"Л "т т" = lim л. 2(x + 2)(x + 3 / 2) / x—>—2 —- = lim--у л. 2x + 3 / x—>—2 Л Ф Z Здесь предел делителя

равен нулю. Таким образом, знаменатель дроби неограниченно убывает и стремится к нулю, а числитель приближается к -1. Вся дробь неограниченно растет,

что условно записывается так: (mi .. 2x + 7x + 6 / x—>co Л + 4x + 4 = .

Ответ: oo.

Пример 1.3. Вычислить]}щ X—»CC 2x^2 + x-4 3x^2 - 2x + 5

Анализ задачи. В данном случае имеем дело с неопределенностью — / oo, необходимо провести тождественные преобразования, например, вынесение общего множителя за скобки числителя и знаменателя и сокращение на него дроби.

Пример 1.4. Найти 11x^2 -78x + 7 / x^7 2x^2 - 9x-35

Решение: lim 2x^2 + x-4 / 3x^2 -2x + 5 = lim X—» $\dfrac{x^2(2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2})}{x^2(3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2})}$ = lim $\dfrac{2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2}}{3 - \frac{2}{x} + \frac{5}{x^2}}$ **2** / 3 Ответ:

Анализ задачи. В данном случае, непосредственное применение теоремы о пределе частного невозможно, поскольку, как показывает подстановка числа 7 вместо x, и предел числителя, и предел знаменателя равны 0.

limG lx^2-78x + 7) = 11-7^2-78-7 + 7 = 539-546 + 7 = 0
x^7

$\lfloor j_m(2x^2$-9x-35) = 2-7^2-9-7-35 = 98-63-35 = 0. Таким образом, данный предел
x^1

представляет неопределенность вида и для решения задачи требуется провести тождественные преобразования выражения, находящегося под знаком предела.

Решение: Разложим числитель и знаменатель на множители, пользуясь следующей теоремой: если л,,л$_2$-корни квадратного трехчлена *ax^2 + Ъx + c,* то

ax^2 + bx + c = a(x -x^x -x$_2$).

Решаем квадратное уравнение через дискриминант или делим «уголком» числитель и знаменатель на множитель *x* - 7.

11x^2-78x + 7 x-7 2x^2 -9x -35 x - 7 2x^2-14x 2X + 5

11л:^{2}—77л- 11л- 1 5x-35

5x-35

0

lim $\overline{11x^2 - 78x + 7}$ lim p-7)(11x-1) p-7)(2x + 5) 11л:-1 11-7-1 76 л ~ л
x^1 2x^2 -9x-35 x^1 Щ? 2x + 5 ---------- = — = *4.* Ответ: 4.
2-7 + 5 19 ---------

Пример 1.5. Вычислить Цщ *2-4X^3 .*
i->7 x^2 -49

Решение. Многочлены, стоящие в числителе и знаменателе, обращаются в нуль при x=7. Нахождение предела сводится к выделению в числителе и знаменателе множителя x-7, незримое присутствие которого и создает неопределенность «0/0». Умножим числитель и знаменатель дроби на 2 + 7x-3

.. 2-7^3 ,. (2-7^3)-(2+ 71^3) 2^2-(TT^3)^2
lim $_2$ЛЛ lim z $_2$ /O *I* lim z $_2$,.mvo *I* o \
x->7 *x* 49 x_>7 (x — 49) • (2 + *y/x* — 3) >7 (x — 49)(2 + >/x — 3)

=lim 4-0-3) =lim *1-x*
x—>7 (X-7)(X + 7)(2 + 7X-3) x^7 (X-7)(X + 7)(2 + 7X-3)

=lim -0-7) =lim -1 _ -1
X^ (x-7)(x + 7)(2 + 7x-3) x^7 O + 7)(2 + Vx-3) 14-(2 + V7-3) 56'

Ответ: 56

Пример 1.6. Найти lim(Г-
X—»C
C

Решение. Разделим числитель и знаменатель на *x ,* получим

X—>co -Л I 1______ x^-co J _| _ Q _| X X 2 — e

Ответ: 1/е.

Задание 2. Найдите пределы.

№	Задание	№	Задание
1	25 + 10 lim ~ ,, - x^9 0 — 11	2	.. 6x + 20 Н? 2,-ю "
3	x + 7x² -2 _ ™ 21x² -8x + 13	4	2 lx² -8x + 13
5	,. (x - 3)(8 + x) lim 2 x^-8 X — 64	6	lim o x 2 л -6x л +^5 д = 3x — 14x- 5
7	sin5x — lim r x^O X	8	arctg9x _ ,lm 11x x—>0 AIX
9	lim <!+-)" =	10	lim (i+2+и = x^O

Пр. р. №12. Исследование функции на непрерывность.

Задание 1. Повторите основные положения темы «Непрерывность функции».

Непрерывность функции.

Функция /(х) называется **непрерывной** в точке x_0, если предел этой функции и ее значение в этой точке равны Цщ *f* (х) = Ж)-

Пусть Лх = $x-x_0$ - приращение аргумента, а **Лу = у-y_0 = /О)-/O_0)** = Ж + Лх)-/(x_0) - приращение функции. Тогда функция *у* = /(х) непрерывна в точке x_0, если lim **Лу = 0,** *т.е.* **Лу** *0 при* Лх *0,* или при-

л,->0

ращение функции в данной точке является бесконечно малой величиной при Лх 0.

Все элементарные функции непрерывны в каждой точке области определения. Точка x_0 называется точкой разрыва функции /(х), если в ней не выполняются условия непрерывности.

Точка x_0 разрыва функции *у* = /(х) называется **точкой разрыва первого рода,** если односторонние пределы функции в этой точке существуют и конечны. Разность /(x_0+O)-/(x_o-0) = Л / называется скачком функции У = /(^{Л}) в точке x_0.

Точка x_0 разрыва функции называется **точкой разрыва второго рода,** если хотя бы один из односторонних пределов в этой точке не существует или бесконечен.

Точки разрыва могут принадлежать, могут и не принадлежать области определения функции.

Если функция непрерывна в каждой точке некоторого множества точек, то она называется *непрерывной на этом множестве,* например, на отрезке [a,Ъ].

Функция, непрерывная на отрезке *[a,Ь},* обладает следующими свойствами: 1) она ограничена на *[a,Ь} *

2) достигает на *[a,Ь}* наименьшего /« = min/X.x) и наибольшего
$a<x<Ъ$

Tf = max /(y) значений;
$a<x<Ь$

3) если *f(a)и f(b)* разных знаков, то существует такая точка ce(a,й), что /Д) = o;

4) для любого А, удовлетворяющего неравенству *m<A<M,* существует такая точка *c* e (a, *Ь),* для которой *f(c) = A*

Задание 2. Вопросы и упражнения: [1, с. 138-139]; **Задание 3.** Выполните по вариантам.

1	Выяснить, является ли функция непрерывной в точке x=1. В случае нарушения непрерывности установить характер точки разрыва. x² -1 *У* = i	2	Выяснить, является ли функция непрерывной в точке x=1. В случае нарушения непрерывности установить характер точки разрыва. $y = \frac{1}{x-1}$
3	Выяснить, является ли функция непрерывной в точке x=1. В случае нарушения непрерывности установить характер точки разрыва. 1 4-1 + 2W-¹)	4	Выяснить, является ли функция непрерывной в точке x=1. В случае нарушения непрерывности установить характер точки разрыва. $y = \frac{2}{1+3^{1/x}}$

Задание 4. Изучите самостоятельно вопрос «Развитие понятия функции» [1, с. 139-140];

Задание 5. Вопросы и задачи для самопроверки по теме 1.4

1. Дайте определение функции и приведите примеры функциональной зависимости. Проверьте, правильно ли вычислено /(2) = 5, если /(x) = $x^3 - x + 1$?

2. Что называется областью определения функции? Проверьте правильность найденной области определения [5;оо)для функции /(*) = л/т —5 и (-1,5; да) для функции f(x) = lg(2x+3).

3. Какая функция называется сложной? Приведите примеры.

4. Дайте определение предела функции в точке.

5. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции? Найдите приращение аргумента хи приращение функции $y = x^3$при изменении аргумента от 1 до 2.

6. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает? Определите интервалы непрерывности функции

7. Дайте определение предела функции на бесконечности. Объясните

основной метод раскрытия неопределенности — на $\frac{00}{00}$ примере вычисления пре-

дела im ,. $\frac{2x^3 - x^2 + 5x}{}$ -----------------

хЛоо X +2x-3

8. Найдите Цщ $\frac{x-4}{}$ x—>2 т 2x

9. Сформулируйте и запишите первый и второй замечательные преде-
лы.

10. Найдите : а)Ц$_т$^^; б)

x—>0 3x-2

Тема 1.5 Тригонометрические функции

Литература: [1, с. 107-111]

Вопросы и упражнения: [1, с. 111-112]

Пр. р. №13. ***Построение графиков тригонометрических функций с помощью геометрических преобразований.***

Задание 1. Изучите [1, с. 107-111];

Задание 2. Выполните:

1. Вопросы и упражнения [1, с. 111-112];
2. Найдите область определения и область значений функции:

a) $y = 1 + \sin^2 x$, *a)*$y = 1{,}5 - 0{,}5\cos^2 x$, *d)*$y = 2tg\frac{x}{2}$; *a)y = 2- ctg3x.*

Задание 3. В одной и той же системе координат постройте графики

функций: а) $y = \cos x$; $y = \cos x - 3$; $y = \cos(x +$

$$б)\ y = \sin x,\ y = \sin x + 2,\ y = \sin(x + \frac{\pi}{3})$$

Пр. р. №14. ***Решение уравнений вида*** *smt = a, cost = a, tgt = a, ctgx=a.* **Задание 1.** Изучите [1, с. 112-114];

Задание 2. Выполните:

1. Вопросы и упражнения [1, с. 117];
2. Решите уравнения:

а) sin *x* = , *а)* cos *x* = , *а)tgx* = 1; *а)ctgx* = —Уз.

Пр. р. №15. ***Решение тригонометрических уравнений.***

Задание 1. Изучите [1, с. 114-117];

Задание 2. Ответьте на вопросы [1, с. 118, вопросы 8, 9]; **Задание 3.** Решите уравнения:

1. По вариантам (четные, нечетные) [1, с. 118, вопрос 10];
2. *d)* sin3x + sinx = 0, a)6sin^2 x-5sinx + l = O,

*а)*sin^2 x + sinx • cosx = 0, *а)2*sinx • sin(^/2 - x) = 1.

Пр. р. №16. ***Решение тригонометрических неравенств.*** **Задание 1.** Изучите [1, с. 117];

Задание 2. Решите неравенства:

$$a)\ \sin x < \frac{1}{2},\quad á)\cos x > \frac{1}{2},\ \hat{a})tgx > \sqrt{3};\quad \tilde{a})ctgx >$$

Тема 1.6 Показательная, логарифмическая и степенная функции, их свойства и графики

Литература: [1, с. 38-43]

Вопросы и упражнения: [1, с. 43-46]

Пр. р. №17. ***Построение графиков степенных, показательных и логарифми ческих функций.***

Задание 1. Изучите [1, с. 38-43];

Задание 2. Выполните:

1. Вопросы и упражнения [1, с. 43, №1-3], [1, с. 44, №4-5];
2. Постройте графики следующих функций:

а) y = x^3 -1, *d)y* = $\log_2$x,d)y = $\log_{1/3}$x.

Пр. р. №18. ***Решение показательных и логарифмических уравнений.*** **Задание 1.** Изучите [1, с. 43-45];

Задание 2. Выполните:

1. Вопросы и упражнения [1, с. 44, №1, с.45, №3];

2. Решить показательные уравнения:

а) 64-2^ =4^, а)2'-2;4 =15, *а)4*^{x} + 2• *2*^{x}-80 = 0.

3. Решить логарифмические уравнения:

а)$\log_{x_}$j(x^2-7x + 41) = 2, 4)lgx + lg(x + 3) = 1, d)$\log_3$x-$\log_9$x + $\log_{81}$x = 3/4.

Пр. р. №19. ***Решение простейших показательных и логарифмических нера еенсте.***

Задание 1. Изучите [1, с. 46];

Задание 2. Выполните:

1. Вопросы и упражнения [1, с.45, №2, 4];
2. Решить показательные неравенства:

а) 2^x >5, d)(l/3)^x <1/81, d)2^{Mx+12} >1.

3. Решить логарифмические неравенства:

а)$\log_3$Qf-3) >0, 4)lg$\frac{x-4}{}$>0, d)$\log_{1/s}$(3jc-5) >$\log_{1/5}$(r + l).

Тема 1.7 Уравнения и неравенства

Литература: [1, с. 228-244]

Вопросы и упражнения: [1, с. 43-44]

Пр. р. №20. ***Решение линейных, квадратных, дробно-рациональных уравне ний.***

Задание 1. Изучите [1, с. 228-229], основные приемы решения уравнений [1,с. 231], [1, с. 232-235].

Задание 2. Выполните:

1. Вопросы и упражнения [1, с. 231, 235];
2. Решить уравнения:

а) 2 – XX + 1 ------ 1----- П + 1 x = 0, ,.л + 4 *а)* ------ +-------- x-4 x + 4 *x-4* К) 3 *a)x*^{3} *+x*^{2} *-4x-4 = 0.*

Пр. р. №21. ***Решение иррациональных уравнений.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по кон спекту лекций.

Задание 2. Решить уравнения:

а) x + ^25-x^2 *= 2, а)x* + 2 = д/4 + т-\/зб + л^2*а)у/х + 3 +у/3x-3* =10.

Пр. р. №22. ***Решение систем линейных уравнений методом Крамера.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по кон спекту лекций, [2, с. 92-101].

Задание 2.

1. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} 1/2 & -1/3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$, а) $\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, а) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$

2. С помощью определителей решите системы уравнений:

$\begin{cases} x - y = 1; \\ 2x + y = 5; \end{cases}$ а) $\begin{cases} 3x + 2y = 13; \\ x - 3y = -3; \end{cases}$ а) $\begin{cases} 2u - v = 0; \\ 3u + 4v = 11; \end{cases}$ а) $\begin{cases} 2x + y = 2; \\ 4x + 2y = 5. \end{cases}$

Задание 3.

3. Вычислить определители третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -7 \\ 8 & 1 & 9 \\ 4 & 6 & 3 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix}$, 4) $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

4. С помощью определителей решите системы уравнений:

а) $\begin{cases} X - y + Z = 6; \\ 2x + y + z = 3; \\ x + y + z = 5; \end{cases}$ $\begin{cases} 2x + y + z = -4; \\ 2y + 2z = 14; \\ 4x + 2y + z = 7; \end{cases}$ $cГy - x -$

Пр. р. №23. *Решение систем линейных уравнений методом Гаусса.*

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по конспекту лекций, [2, с. 103-105].

Задание 2. Решите системы уравнений задания 3(4) пр.р. №22 методом Гаусса.

Задание 3. Решите системы уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} x + 2y + z = 8; \\ 3x - 2y - 3z = -5; \\ 3x - 4y + 5z = 10; \end{cases}$ а) $\begin{cases} 2x - y + 3z + 2Z = 4; \\ 3x + 32y + 3z + 2Z = 3x - 6; \\ 2y - z + 2t = 6; \\ 3x - y + 3z - t = 6; \end{cases}$

Пр. р. №24. *Геометрический метод решения задач линейного программирования с двумя переменными.*

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по конспекту лекций, [4, с. 25-28].

Задание 2. Решите задачи [4, с. 103 (№24, 25)].

1. На изготовление малого рекламного щита требуется 2 часа и расходуется 4 единицы материала, а на изготовление большого рекламного щита - 5 часов и 5 единиц материала. Недельный запас рабочего времени составляет 80 часов, а материала - 100 единиц. Сколько рекламных щитов каждого вида надо изготовить за неделю, чтобы прибыль была наибольшей, если реализация одного малого щита приносит 180 ден. ед., а большого щита - 400 ден. ед.?

2. На производство одного торта «Весна» требуется 0,5 кг бисквита и 0,5 кг крема, а на производство торта «Лето» - 0,6 кг бисквита, 0,3 кг крема и 0,1 кг сиропа. Дневная норма запаса бисквита 24 кг, крема -18 кг. Прибыль от реализации торта «Весна» - 30 ден. ед., «Лето» - 33 ден. ед. Сколько тортов каждого вида надо изготавливать ежедневно, чтобы получить наибольшую прибыль? Каков при этом должен быть дневной запас сиропа?

Пр. р. №25. ***Решение прикладных задач.***

Задание 1. Изучите примеры демонстрационного варианта.

Пример 1. До просушки влажность зерна была 23% , а после просушки стала равной 12%. На сколько процентов изменилась масса зерна после просушки? Решение.

Составим математическую модель задачи и решим ее:

Пусть масса зерна до просушки была х кг, а после просушки масса зерна стала у кг. Тогда в этом зерне содержалось (0,23%>г воды, а, значит, сухих веществ было (1-0,23)% = 0,77% кг, которые после просушки стали составлять 100- 12=88% зерна.

Тогда0,77х -88%

- 100%

Находим $y =$ 0,77% ТОО / 88 77% / 88

Найдем разность между начальной и конечной массой зерна % ставляет от начальной массы - или 12,5%. 7 / % / 8 -, что со- 8

8

Ответ: после просушки масса зерна уменьшилась на 12,5%.

Пример 2,

Двум продавцам поручена реализация газет и журналов. Выполненная работа оценивается суммарно в 2500 руб., причем первый продавец взялся за реализацию газет, а другой - за реализацию журналов. Газет в 2,5 раза больше, чем

2

журналов, но реализация одного журнала оплачивается на 66 j% дороже реализации

одной газеты. Сколько денег получит каждый продавец?

Решение. Составим математическую модель задачи:

Пусть будет реализовано % журналов, тогда газет 2,5%; Пусть реализация газеты оплачивается у руб., тогда реализация 1 журнала, оплачиваемая на

2 2 5

66j%больше, будет стоить $y + -y = -y$ руб. Таким образом, реализация газет будет стоить (2,5%у)*руб.*, реализация журналов (-ут)*руб.,* а вместе по условию задачи 2500 руб.

Составим и решим уравнение:

2,5xy + |xy = 2500; 2,5*xy*(1 + |/2,5) = 2500; 2,5*xy* = 2500/(1 +1 -|); 2,5xy = 2500:

2,5xy = 2500 • —
5

2,5xy = 1500 (руб.) - стоит реализация газет.

2) 2500-1500=1000 (руб.) - стоит реализация журналов.

Ответ: 1500 руб., 1000 руб.

Пр. р. №26. ***Решение рациональных неравенств.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по кон спекту лекций, [1, с. 240-244].

Задание 2. Вопросы и упражнения [1, с. 244].

Задание 3. Решить неравенства:

а) а) 5x + 4 л л 3x ------------------------------------ < 0, а)4 ------- > ---------- (4x - 3)
7 + 2x 2 8 6 13 1

Пр. р. №27. ***Решение иррациональных неравенств.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по кон спекту лекций.

Задание 2. Решить неравенства:

а)л/т -1 < 3, *а)у/x*^{3} *—x* > 2, *а)у/x*^{2} *—5x* < л/б.

Пр. р. №28. ***Решение систем рациональных уравнений и неравенств.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по кон спекту лекций, [1, с. 236-240].

Задание 2. Вопросы и упражнения [1, с. 240].

Задание 3. Решить систему уравнений:

1. Методом подстановки:

К)
15'

2.

а)<

Зафическим методом:

т + у = 1; Гx^2+y^2=5;
як
xy = -2; (xy = 2;

Пр. р. №29. ***Решение нелинейных уравнений, неравенств, систем.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по кон спекту лекций.

Задание 2. Решить уравнение:

x^2(x-4)(x + 4) = 24-2x^2(x^2 +5).

Задание 3. Решить неравенство: $x^2 +105 > 22x$

Задание 4. Решить систему уравнений:

$x + xy + y = 11,$ а)- $= 4,$

$x^2y + xy^2 = 30.$ $2\text{-}Jx + 3\text{-}Jy = 18.$

Пр. р. №30. ***Решение систем тригонометрических уравнений.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по кон спекту лекций.

Задание 2. Решить системы уравнений:

а) sin л COST = 0,25; sin y COST = 0,75;

d)< x-y = -1/3, $\cos^2$ (лт) - $\cos^2$ (яу) = 0.

Пр. р. №31. ***Решение систем показательных и логарифмических уравнений.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по кон спекту лекций.

Задание 2. Решить системы уравнений:

1. а}- $9^{X+У} = 729,$ 3^,¹ = 1; а)< $2^x - 2^У = 16,$ т + у = 9; а)- $(j5)^{x}\text{-}^{y} = 25,$ Гз^x + $3^У$ =28, як 2бх-у-1=1. =

2. а)< $\lg T - \lg y = 1, \lg^2 T +$ $\lg^2 y = 5;$ 4) $\log_2(T^2 + y^2) = 5,$ $2\log_4 T + \log_2 y = 4;$

а)< lgT-lgy 7, lgT + lgy 5; а)< $\log_2(T + l) = \log_2(y + l/4), \log_2$ т - $2\log_2(y-1/2) = 0.$

Пр. р. №32. ***Задачи на составление уравнений и систем уравнений.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по конспекту лекций.

Задание 2. Решите задачу, в случае затруднения самостоятельного решения изучите предложенный демонстрационный вариант.

Двое продавцов получают различную плату за проработанный день. Первый заработал 2400 руб., а, второй, работая на 6 дней меньше первого, получил 1350 руб. Если бы второй продавец работал столько дней, сколько первый, а первый столько сколько второй, то оба получили бы одинаковую сумму. Сколько дней работал каждый продавец?

Решение.

Пусть первый продавец проработал x дней. Тогда второй продавец проработал (т-6) дней; Первый продавец получает за проработанный день

2400 г   г   1350 г
---- руб.; второй продавец получает за проработанный день ----------- руб.
x x-6

(2400 (х_б)) руg _ плата пеpвому продавцу, если бы он проработал столь-
X
ко же дней, сколько и второй;

(1350 х) руб. - плата второму продавцу, если бы он проработал столько
х-6
же дней, сколько и первый. По условию задачи, в данной ситуации они получили одинаковую плату.

Составим и решим уравнение: $\frac{2400}{x}(x - 6) = \frac{1350}{x-6}x$;

$2400(x-6)^2 = 1350x^2$;

$7x^2 -192x +576 = 0$;

£> = 192^2 -4-7-576 = 20736;

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_{1,2} = \frac{192 \pm \sqrt{20736}}{2 \cdot 7}$

$x_1 = \frac{192+144}{2 \cdot 7} = \frac{336}{14} = 24$;

$x_2 = \frac{192-144}{2 \cdot 7} = \frac{48}{14} = 3\frac{3}{7}$ (не удовлетворяет по смыслу задачи).

Получаем следующие корни: x_1; x_2. x_2 решением задачи быть не может (x_2-6<0), поэтому x=24; x-6=18.

<u>Ответ:</u> Первый продавец проработал 24 дня, второй - 18 дней.

Задание 3. Решите задачу:

Торговая фирма ежедневно отправляет на свои торговые точки 180 лотков хлебобулочных изделий (поровну на каждую точку). В связи с тем, что четыре точки были закрыты, количество лотков, выделенных на каждую точку, увеличилось на 12 единиц. Сколько торговых точек осталось работать? Сколько лотков стала получать каждая точка?

Подготовка к контрольной работе №1.

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций и учебнику [1].

Задание 2. Решить уравнение.

1) 3 + 5л/л = 13; *2)у/36 + х = 2 + 4х* 3)$25^{lg"}$ = 5^2; 4)$3^{2"}$ -5• 3^x + 6 = 0.

Задание 3. Доказать тождества:

1) (sina + sin/?)^2+(cos6Z + cos/?) = 4cos ^{2} ; *а-(3*

2) $\dfrac{tga-sina}{tga}$ = 1 - cos *а.*

Задание 4. Построить часть графика функции:

1) *у* = sinjc *га [-ггут], 2)у = cosx/a -2л*; 3)*у = tgx га*

Задание 5. Решить уравнения:

1) sin4(z = д/з/2; 2) cos у = -1/2; 3) *tg(a - л* / 6) = 1/л/3; 4)4 + *5cjsx* -2 $\sin^2 x$ **= 0. Задание 6.** С помощью определителей решите системы уравнений:

а)< *2x - z* = 1; *х - у + 2z* = 0; *4х + у + 2z* = 1; *а* к *X + у - Z* = 2; *- 2х + у + z* = 3; Т + у + Z = 6.

Задание 7. Решите системы уравнений методом Гаусса:

я) *x-2y* + z - Z = 0; *2х + у* + 3z +*1* —12; *х + 3у + z + 2t* = 10; *3х - у - z + 3t* = 17;

а) ■ *$3x_3$ - $2x_4$* = 6; 2Xj ~*x_2 - $2x_3$ - $3x_4$* = 8; 3х, + 2х; - *x_3 - $2x_1$* 2х$_4$ = 4; - *$3x_2$* + 2х, + *x_4* = -8.

Задание 8. Найти указанные пределы:

а) lim $\dfrac{x \quad -3л \quad + \quad 2}{14— x\text{-}3x^2}$;б) lim $\dfrac{2\text{-ТТ\^з}}{x^2 -49}$ (Ответ: -1/56).

Задание 9. Решить задачи методом математического моделирования:

1) Объемы трех торговых залов равны 2410, 1790, 1050 куб.м. Распределить 2625 руб., затраченных на отопление этих помещений, пропорционально их кубатуре. Какова стоимость отопления каждого из торговых залов?
2) В течение года стоимость товара повышалась дважды на один и тот же процент. Первоначальная цена товара составила 100 тыс. ден. ед. После второго повышения она составила 121 тыс. ден. ед. На сколько процентов повышалась стоимость товара оба раза?

Раздел 2. Начала математического анализа

Тема 2.1 Последовательности

Пр. р. №33. ***Нахождение пределов числовых последовательностей.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по кон спекту лекций и [1, с. 163-169].

Задание 2. Вопросы и упражнения [1, с. 169].

г, Т II - ч.. $2и^2$+и-1 .. $и^2$ -7/7 + 10

Задание 3. Наити указанные пределы: а)lim — -------------- ; б) 1хгп —\ ---------

п—/7 3/7 4 и—>-5+0 *П 25*

<u>Решение демонстрационного варианта.</u>:

$я^2$(2 + --Л) 2+*i*_*J*_

х *2п +п-\ 2п +п-* *п* n^2

а1 1Ш1 $\frac{2}{й}$ -3и-4 1Ш1 *п* -3и-4 lim lim ,-2-4 *п п*

<u>Ответ:</u> 2.

- 7лз +10

б) lim ~

$и^2$ -25

л->-5+0

<u>Решение:</u> Разложим числитель и знаменатель на множители, а затем сократим дробь на (п-5), чтобы избавиться от неопределенности «0/0»:

n^2 -7и + 10 = 0, £> = 7^2 -4-1-10 = 49-40 = 9

7 + V9 7 + 3 с . 7-V9 7-3

2 2 2 2

v *(п-5)(п-2)*_*Л*. *п-2* *5-2*

lim ≥ --7-lim 7Т7-0,3

/?>510 *(W* 5_)(Л2 + 5j /? > 510/^+5 .v>5-0 5 + 5

<u>Ответ:</u> 0.3.

Пр. р. №34. ***Решение задач финансовой математики.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по кон спекту лекций и [4, с. 68-99].

Задание 2. Вопросы и упражнения: [4, с. 100 (№1-11), с. 104, №30]

Тема 2.2 Производная и ее приложения

Литература: [1, с. 169-180]

Вопросы и упражнения: [1, с. 180]

2.2.1 Определение производной. Геометрический смысл производной. Формулы дифференцирования.

Понятие производной является одним из фундаментальных понятий математики. Многие задачи, как самой математики, так и естествознания, техники, экономики приводят к этому понятию.

Пусть функция *y = f(x)* определена в промежутке X. Возьмем из этого промежутка фиксированное значение аргумента *x* и придадим ему приращение Ах так, чтобы новое значение аргумента *x* + Ах принадлежало этому промежутку. Тогда значение функции /(х) заменится новым значением /О) + Ау = /(х + Ах), т.е. функция получит приращение Ау = /(х + Ах)-/(х).

Предел отношения приращения функции Аук вызвавшему его приращению

аргумента Ах при стремлении Ах к нулю, т.е.

lirn ~ = lirn + называется *производной* у = /(х) по аргументу *x* в
Лч—>0 Ал* Лч—>0 Ал*

точке *x.* Производная обозначается одним из символов: у), у/'(х),—, а ее зна- *dx*

чение при $x=x_0$ обозначается у (x_0), /'(x_0), $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$

Операция нахождения производной называется *дифференцированием.*

Если функция /(х) имеет производную в точке х, то она называется *дифференцируемой* в этой *точке.*

Если функция *f* (х) имеет производную в каждой точке промежутка A^7, то говорят, что эта функция *дифференцируема* на этом *промежутке.*

Рассмотрим теперь понятие *касательной* к линии *y =f(x)* в данной точке x_0. Зафиксируем точку $M_0(x_0, y\ o)$ на кривой у *=f[x);* точку М(x_0+Ах,у + Ау) будем перемещать по кривой, приближая ее к Прямая, проходящая через точки M_o и М называется *секущей.* Ее уравнение: $y - y_0 = tg$ у?(х-x_0),(л - x_0), где

Если существует предельное положение секущей при Ах^-0, то его называют *касательной* к данной кривой в точке M_o.

Уравнение касательной будет иметь виду $-y_0 = к(x - x_0),$

где £ = zgcr = Цуп zgy? = Цуп — = y'(x_0). Итак, если функция y = /(x) имеет в точке △x
Лг->0 Лг->0

x_0 производную, то ее график имеет в этой точке касательную, уравнение которой

$$У \sim Уо = У' (x_0)(x - x_0),$$

и, следовательно, геометрическим смыслом производной может служить тангенс угла наклона к оси Ox касательной к графику функции.

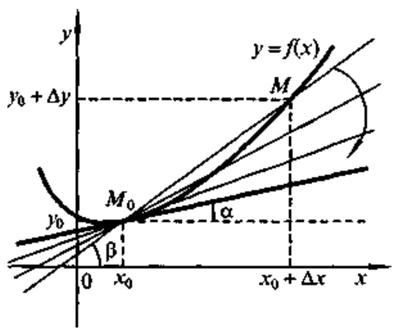
Для всех простейших элементарных функций можно вычислить их производные на основе определения, а также с использованием некоторых правил дифференцирования.

Если функции $u(x)$ и т(x) дифференцируемы в точке x_0, то в точке

, дифференцируемы функции $u \pm$ v, MV, cu(c- const), $\frac{u}{}$(т(x) Ф 0) и справедливы

/ I \| || / \| | | / \| | ,U_V UV 1IV J,,

формулы: (U + V) = U+V (U-V)=UV + UV (cu) =cu (-)'=------------------------------- —
V V



Пример 2.1. Вычислить значение производной

функции $f(x) = \frac{1 + x^x}{}$ при x_0 = —1

Решение.

,, x X _ $\frac{Д + А,}{x^3}$ _ $\frac{(1 + -X^2)' - A-^3 \sim (x^3)'\bullet (1 + X^2)}{(x^3)^2}$ = 7

$2x\text{-}x^3\text{-}3x^2\text{-}(1 + x^2)$ _$\text{-}x^4\text{-}3x^2$ _ x^2+3.

/'(-!) = = - $\frac{(\sim 1)^2 +3}{(-1)^4}$ = -4. Ответ: -4.

Пр. р. №35. *Нахождение производных элементарных функций.*

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по конспекту лекций и [1, с. 169-180].

Задание 2. Вопросы и упражнения: [1, с. 174, с. 178, с. 180]

Задание 3. Выполните упражнения.

1	Вычислить значение производной функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 7 \ln x$ в точке $x = 0{,}5$	**2**	Вычислить значение производной функции /(x) = sin x + COST- tgx в точке x = — 71 4
3	Вычислить значение производной функции $f(x) = \frac{e^x}{\text{-----------}}$ в точке $x = 2$	**4**	Найти угловой коэффициент касательной к графику функции y = COST в точке с абсциссой $x_0 = 0$
5	Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(f) = \frac{y}{—} + 4/^2 + 3t - 8$ (перемещение измеряется в метрах). Найти скорость в момент $t = 2$ с после начала движения.	**6**	Найти абсциссу точки перегиба графика функции $y = \vert x^3 - 2x^2 + 1$

Пр. р. №36. ***Нахождение производных сложных и обратных функций.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по кон спекту лекций.

2.2.2 Производная сложной и обратной функции.

Пусть $y = f(u)$, где u является не независимой переменной, а функцией независимой переменной x т.е. $u = ф(x)$. Таким образом, $У = /ЫuУ)$.

В этом случае функция ***У*** называется сложной функцией x, а переменная ***u*** - промежуточным аргументом.

Производная сложной функции находится следующей теоремой: если $y = f(u)$ и $u = (p\{x)$. - дифференцируемые функции своих аргументов, то производная сложной функции $y = f\{(p(uy$ существует и равна произведению производной функции y по промежуточному аргументу u на произведение промежуточного аргумента u по независимой переменной x:

Эта теорема распространяется и на сложные функции, которые задаются с помощью цепочки, содержащей три звена и более.

Задание 2. Изучите примеры демонстрационного варианта.

Пример 2.2. Вычислить значение производной функции $f(\%) = (x^2 + 3x)^5$ в точке $x = -1$.

Решение. Составляющими функции являются $y = u^5, u = x^2 + 3x$. согласно правилу дифференцирования сложной функции, находим $y_x = y_u \cdot u_x = 5(x^2 + 3x)^4(2x + 3)$; $y(-1) = 5(1 - 3)^4(-2 + 3) = 5 \cdot 16 \cdot (-1) = -80$

Ответ: -80.

Особого внимания заслуживает случай функции, для которой не только определяющее ее сопоставление *(x^>y),* но и обратное ему (у *-^-{x}, где/(x) = y для любых* хе {%}) тоже будет функцией, которая называется обратной к данной. Например, для функции *y* = 2.х+4 обратной будет функция

1 $_0$ *y* = — *x-2.*
2

Графики обратных функций симметричны относительно прямой $y = x$.

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в *<a,Ъ>,* имеет непрерывную обратную функцию $x = g(y)$ и y_x *Ф 0, x* е< *а,Ъ >,* то x_y тоже существует, и справедлива формула

1

Пример 2.3. Дано $y = x^2+2x + 3$, вычислить x_y.

Решение. Найдем производную $y'_x = 2x + 2$. $y'_x = 0$, если $x = -1$. На промежутках *(-cc-i)u (~1,+cc)* существует обратная функция и y'_x *ФО,* поэтому только при

хФ-1 справедливо *x*

2x +

Ответ: *x..* = ----------
----------- ^{y} *2x + 2*

Пример 2.4. Дано $x = e^y - y$, вычислить y'_x.

Решение. Найдем производную $x'_y = e^y - 1$. На промежутках *(-<x>,0) и (0,+<x>)* существует обратная функция и *x'* *Ф 0,* поэтому y'_x = —-—.

e^y *-1*

Ответ: у'. = ——.
----------- e^y *-1*

Пр. р. №37. ***Нахождение дифференциала функции. Приложение дифференциала к приближенным вычислениям.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы по конспекту лекций.

Задание 2. Найдите дифференциал функции:

1)у = 25л^3 — 16л + 7; 2)у = (2л^3 -4)^5;3> = —.
In *t*

Задание 3. Вычислить приближенное значение приращения функции *y* = **л^2 +** *2x* + 5 при изменении аргумента от *x* = 2 *at x* = 2,001.

Задание 4. Вычислить приближенное значение функции *y* = **л^3 + л^2** *-2x* при л = 2,01.

2.2.3 Анализ функций и их графиков

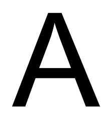
Литература: [1, с. 181-184]

Вопросы и упражнения: [1, с. 185]

Знаки первой производной

Если знак первой производной в точке отрицателен, то функция убывает в этой точке; если знак первой производной положителен, функция возрастает в этой точке. Возможны случаи возрастания функции к вершине или в сторону от впадины. Также функция может убывать к впадине или убывать в сторону от вершины. Эти возможности показаны на рис. 2.2.

Есть две другие возможности для оценивания первой производной: она может быть равной нулю или она может не существовать. Если первая производная равна нулю в точке, то функция постоянная и это говорит о наличии стационарной точки.



Первая производная положительная: Возрастание к вершине

Возрастание в сторону от впадины

Первая производная отрицательная: Убывание к впадине

Убывание в сторону от вершины

Рис. 2.2

Обсудим значение точки, в которой первая производная не существует.

Пример 2.5

Возьмем функцию $f\,(л) = л^3 + 3л^2 - 9x + 3$

Используя первую производную, найдем, в каких точках функция убывает, возрастает или не изменяется (то есть постоянная):

$x = -4$, $x = -3$, $x = 0$, $x = 1$м$x = 2$.

Решение Найдем первую производную $/'(л) = 3л^2 + 6л - 9$. Оценим первую производную в указанных точках

$f\,'(-4) = 15 > 0$, поэтому функция возрастает в этой точке.

$/'(-3) = 0$ Первая производная равна нулю; поэтому функция не меняется в этой точке.

$f\,'(0) = -9 < 0$, поэтому функция убывает в этой точке.

$/'(1) = 0$ Первая производная равна нулю; поэтому функция не меняется в этой точке.

$f\,'(2) = 15 > 0$, поэтому функция возрастает в этой точке.

Информация, обнаруженная при использовании первой производной, подтверждается при рассмотрении графика функции $/(л) = л^3+3л^2-9л + 3$, данного на рис. 2.3

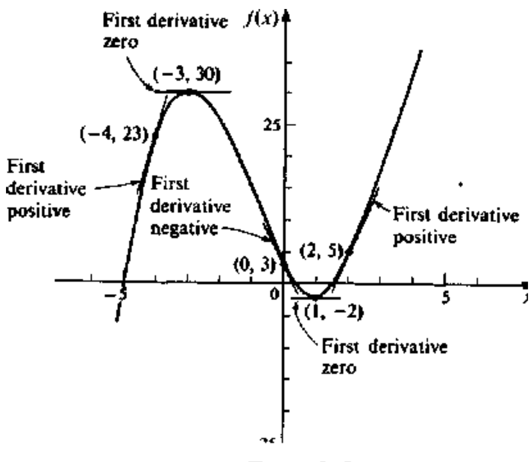


Рис. 2.3.

Вопросы и задачи для самопроверки по разделу 2.3.1

Используя первую производную, установить, в каких из указанных точек следующие функции убывающие, возрастающие или неизменяющиеся.

1. /(л) = л^2-л + 1 в x = -3;0;0,5;2. 3..Дл-) =

2л-^{3}-3л-^{2}+3в л = -3,0,|,1,4.

5. $f(x) = x^4$ -8л^2 +16 в

л =-3,-2,-1,0,1,2,3.

7. $f(x)$ = л/4-л^2 в x = -1,0,1.

2.$f(x) = x^{\prime 4}$ в x = 1,2,3.

4./(л) = 3л^2-2л^{3}в л = -1,0,|,1,2.

6. /(л) = x^3 + 4л^2 - $3x$ - 9 в x = -4, -3, -2, -1,0, |, 2. 8. $f(x)$ = *Jx^2 -4

в x = -4,-3,3,4.

Критические точки, максимум и минимум

9. $f(x)$ = 2л^2 - л^4 в л = -2,,-1,0,1,2.

10./(л) $\frac{1}{—}x^5 + \frac{1}{3}x^3$ -6л + 2в 5 л = -2,-^,-1,0,1,>/2.

Точка, которую мы нашли как максимум или минимум, называется **локальным максимумом** или **локальным минимумом.** Термин «локальный» означает *в ближайшей окрестности точки,* там могут быть рассмотрены другие точки изгиба, которые лежат выше или ниже, чем точка рассмотрения.

Рассмотрим функцию /(л) = л^3 + 3л^2 - $9x$ + 3, данную в примере 2.5.

Точка (-3,30) является локальным максимумом, потому что это самая высокая точка в ближайшей окрестности, но в других частях графика есть точки, которые располагаются выше. Одна из этих точек /(4) = 79. Точка (-1, -2) является локальным минимумом.

Иногда локальный максимум (минимум) является также наивысшей (низшей) точкой всех точек на кривой. Такую точку называют **глобальным максимумом** или **глобальным минимумом.**

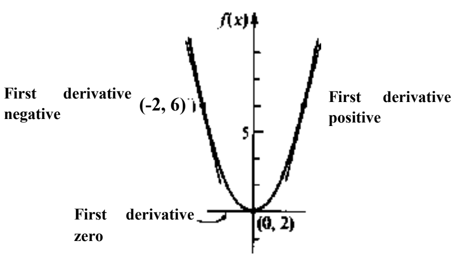


Рис. 2.4

Пример 2.6. Рассмотрим функцию $f(x) = x^2 + 2$. Точка (0, 2) является локальным минимумом, потому что это - нижняя точка в ближайшей окрестности; это также глобальный минимум, потому что это - нижайшая из всех точек на кривой. С другой стороны, у функции в примере рис. 2.3, которую мы обсуждали ранее, нет глобального максимума или минимума, поскольку кривая простирается бесконечно вниз налево и бесконечно вверх направо.

Рассмотрев графики функций, можно предположить, что максимумы и минимумы встречаются, когда первая производная оценивается нулем. Это не всегда верно, потому что первая производная может быть равной нулю, когда точка не максимум или не минимум. Кроме того, могут быть другие максимумы или минимумы, такие, что первая производная в них не равна нолю.

Обсудим случай, когда **первая производная не существует.** Мы не использовали это выражение прежде, потому что мы предполагали, скорее вслепую, что первая производная всегда существует. Но это не так.

Производная не существует в двух случаях:

Во-первых, когда нет точки в производной. Это понятие может быть проиллюстрировано следующим примером.

Пример 2,7, Рассмотрим функцию /(*) = *^{V2}

Первая производная /'(л) = -л $^{1/2}$ или **-**Д=. Наблюдая, мы видим, что **2** 2>/x

точка *x = 0* не входит в область определения производной. (Деление на ноль). Потому что /'(*) не существует в л = 0, поэтому мы не можем найти /'(O)для этой функции.

Следует пояснить, что некоторые производные не существуют в точке по такой же причине, что некоторые функции не существуют в точке; эти точки не входят в область определения производной.

Второй случай, при котором производная не существует, связан с определением производной. Вспомним определение производной функции *f* в

точке *x*

$$_{Zw\to 0}\quad \frac{/(л + Ах)-/(л)}{Av}$$

Так как определение производной включает предел, то производная не

будет существовать, если предел разностного отношения не существует, что

можно проиллюстрировать на примере.

Пример 2,8, Рассмотрим функцию

x,x <2 2x - 2;

x > 2

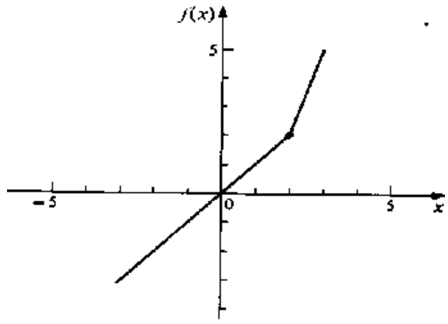


Рис. 2.5

/(*) = <

Заметим, что в $x = 2$ здесь «резкий» или «острый» изгиб на графике.

Для оценки при $x < 2$ функция определена как /(%) = %. Поэтому, слева от

$$\lim_{Zw\to 0} \frac{/(2 + Av) - /(2)}{Av} = \lim_{Zw\to 0} \frac{2 + Av — 2}{Av}$$

Теперь, для оценки при л>2, функция определена как $f(x) = 2x-2$. Поэтому, справа от 2:

$$\lim_{Zw\to 0} \frac{Д2 + AУ) - /(2)}{Av} = \lim_{Zw\to 0} \frac{2(2 + Av) — 2 — 2x + 2}{Av}$$

числа 2

Так как лево- и правосторонние пределы не равны, поэтому **предел не существует,** что подразумевает, что первая производная не существует в $x = 2$.

Функции, подобные этой, что определены в разных частях, почти всегда подозреваемы в отсутствии производной в точках, где части сходятся вместе. Анализ разносторонних пределов обнаружит, существует или нет производная в этой точке.

Проверка значения первой производной

Теорема 2.1. Если /(у)- функция, определенная на интервале $a<x<Ъ$ и точка $c(a<c<Ъ')$~ максимум или минимум, то выполняется одно из следующих двух условий:

1./ '(с) = 0 2 / '(с) не существует.

Все точки *с* , такие, что/'(с) = 0 *или f\c)* не существует, называются

критическими точками.

Максимум или минимум может встретиться и в концах интервала *a<c<Ь..* если мы рассматриваем ограниченную область. Ограниченные области могут возникнуть также из рассмотрения самой функции, такой как /(-*) = л/т, где £> = { л|л>0 } и левая крайняя точка (0, 0) (нет правой крайней

точки), или путем указания вместе с функцией области, по которой она рассматривается.

Пример 2.9 Рассмотрим функцию /(л) = $л^2$ + 2 на ограниченной области £> = {л|о<л<2}. График этой функции на своей ограниченной области изображен на рис. 2.6.

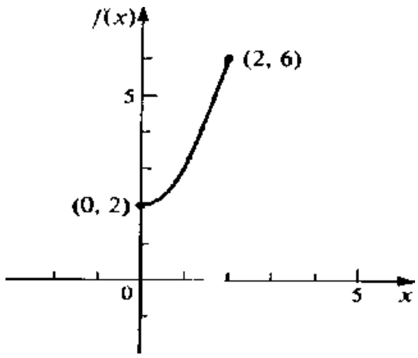


Рис. 2.6

Тогда (0, 2) - левая крайняя точка, а (2, 6) - правая крайняя точка. 0 - самое малое значение в области; 2 - самое большое значение в области;

Теорема 2.1 не говорит, что все точки, с, для которых одно из вышеуказанных условий истинно, будут максимумами или минимумами. Это возможно для некоторой точки, *С ,* но может быть так, что *f'(c) = 0 или f'(c)* не существует, и все же ***с*** не максимум или минимум.

Таким образом, *все максимумы и минимумы являются критическими точками, но не все критические точки являются максимумами или минимумами.*

Точка является ***максимумом,*** *если знак первой производной меняется с положительного слева от точки на отрицательный справа от точки.*

Аналогично, если *точка является* ***минимумом,*** *если знак первой производной меняется с отрицательного слева от точки на положительный справа от точки.*

Если знак первой производной не изменяется ни одним из двух вышеуказанных образов, то точка не является ни максимумом, ни минимумом.

Алгоритм проверки первой производной

1. Найдите первую производную функции.
2. Приравняйте первую производную нулю и решите полученное уравнение.
3. Найдите точки, для которых первая производная не существует.
4. Оцените первую производную чуть слева и чуть справа от каждой критической точки, найденной в пунктах 2 и 3.

а) Если знак первой производной меняется с положительного слева на отрицательный справа, то точка является максимумом.

б) Если знак первой производной меняется с отрицательного слева на положительный справа, то точка является минимумом.

в) Если знак первой производной не меняется (то есть он положителен с обеих сторон от точки или отрицателен с обеих сторон от точки), то точка ни максимум, ни минимум.

г) Если есть левая крайняя точка, оцените первую производную немного справа от нее. Если знак первой производной отрицателен, то крайняя точка есть максимум; если положителен, то крайняя точка минимум.

д) Если есть правая крайняя точка, оцените первую производную немного слева от нее. Если знак первой производной отрицателен, то крайняя точка есть минимум; если положителен, то крайняя точка максимум.

Пример 2.10

Найти максимум и минимум /(л) = E+2

Решение: Найдем первую производную /'(л) = 2л. Приравняем первую производную нулю и решим: 2л = 0; л = 0. Нет точек, в которых первая производная не существует. Единственная критическая точка этой функции в $x = 0$. Оценим первую производную вокруг $x = 0$. /'(-1) = -2; f'(1) = 2. У этой функции нет крайних точек.

Заключение. В $x = 0$ знак первой производной изменился с отрицательного на положительный. Поэтому, точка л = 0 является минимумом. Также, в виду того, что нет никаких других критических точек и нет крайних точек, л = 0 - единственный максимум или минимум. Координаты точки минимума (0,2).

Рисунок 2.7 показывает график этой функции. Точка (0;2) является точкой глобального минимума.

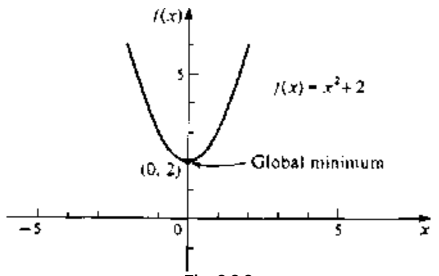


Fig. 3.2.3

me. x. /

Пример 2.11

Найти максимум и минимум f(%) = У + 3л^2 - $9x$ + 3

Решение: Найдем первую производную $f'(x) = 3x^2 + 6x-9$. Приравняем первую производную нулю и решим. ЗУ + 6л-9 = 0; $x = -3$ *и* л = 1. Здесь нет точек, в которых первая производная /'(У^{не} существует. Из шагов 2 и 3 единственные критические точки $x = -3$*и* $x = \backslash$. Оценим первую производную вокруг точек $x = -3$ *и* л = 1. /'(-4) = 15, /'(-2) = -9;/'(0)=-9, /'(2) =15. У ЭТОЙ функции нет крайних точек. Знак первой производной меняется с положительного на отрицательный в x = -3; эта точка является максимумом. Знак первой производной меняется с отрицательного на положительный в x = 1; эта точка является минимумом. Так как нет других критических и крайних точек, $x = -3$ *и* $x = 1$ единственные максимум и минимум этой функции. Найдем /(-3) = 30;/(1) = -2. Поэтому координаты максимума и минимума (-3,30) и (1,-2) соответственно. Рис. 2.8 изображает эту функцию. Мы видим точки графика, которые выше, чем (-3,30) и точки ниже (1,-2). Поэтому (-3,30) - локальный максимум, а (1,-2)- локальный минимум.

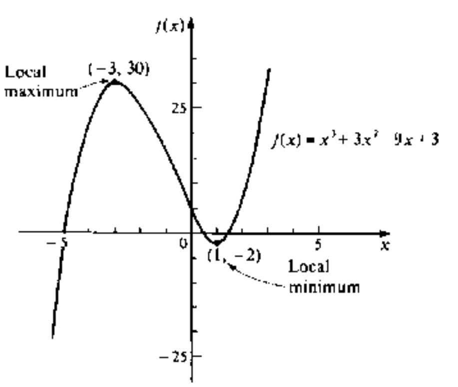


Рис. 2.8

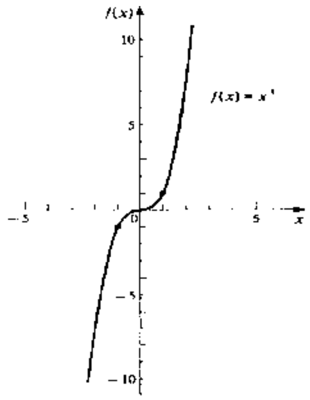


Рис. 2.9

Пример 2.12. Найти максимум и минимум *f (x) = x*^{3}

<u>Решение:</u> *f'(x) = 3x*^{2}*\ 3x*^{2} *=0; x = 0 f'(-V) = 3;f'(l) = 3.* Знак первой производной не менялся в x = 0; эта точка не является ни максимумом, ни минимумом. Т.к. нет других критических и крайних точек, эта функция не имеет максимума или минимума. Найдем /(-3) = 30;/(1) = -2. Рис. 2.9 изображает эту функцию. У этой функции нет максимума и минимума.

Пример 2.13

Найти максимум и минимум *f (x) = x*$^{2/3}$

<u>Решение:</u> Найдем первую производную *f* 2 3^3

Из шагов 2 и 3 единственная критическая точка *x = 0.* Оценим первую производную вокруг точки *x = 0* /'(-I) =4

У этой функции нет крайних точек. /'0)4

Заключение. Знак первой производной меняется с отрицательного на положительный в точке *x = 0',* эта точка является минимумом. Так как нет других кри тических и крайних точек, $x = 0$ единственный максимум или минимум этой функции. /(0) = 0. Поэтому (0,0)- координаты точки минимума. Рис. 2.10 иллюстрирует эту функцию. Точка (0,0) ниже всех точек графика. Поэтому (0,0) является глобальным минимумом.

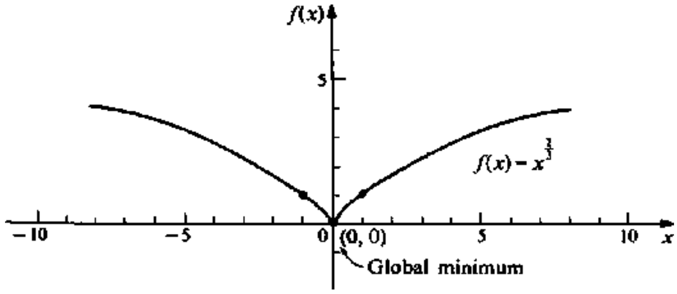


Рис. 2.10

Пример 2.14

Найти максимум и минимум функции /(л) = л^2-2л + 3на области определения D = {л|0 < x < 3}

Решение: /'(%) = 2%-2. Приравняем первую производную нулю и решим. $2x-2 = 0$; $x = 1$. Здесь нет точек, в которых первая производная не существует.

Из шагов 2 и 3 единственная критическая точка т = 1.

Оценим первую производную в точке $x = 1$ 3

Эта функция имеет две крайние точки. Оценим первую ,.Д.

производную чуть справа от левой крайней точки $x = 0$, и чуть слева от

правой крайней точки $x = 3$

<u>Заключение.</u> Знак первой производной меняется с отрицательного на положительный вокруг точки $x = 1$; эта точка минимума. Знак первой производной чуть правее от точки $x = 0$ отрицательный; функция убывающая в сторону от левой крайней точки. Поэтому левая крайняя точка $x = 0$ - максимум. Знак пер

вой производной чуть левее $x = 3$ положителен; функция возрастает к правой крайней точке. Поэтому правая крайняя точка $x = 3$ - максимум.

Найдем /(0), /(1) и /(3) /(0) = 3; /(1) = 2; /(3) = 6

Поэтому (0,3) и (3,6) координаты максимума, а (1,2)-координаты минимума. Рис. 2.11 изображает эту функцию. График подтверждает, что точка (1,2) нижайшая точка, а точка (3,6) высшая точка; они соответственно глобальные минимум и максимум. Точка (0,3)-локальный максимум.

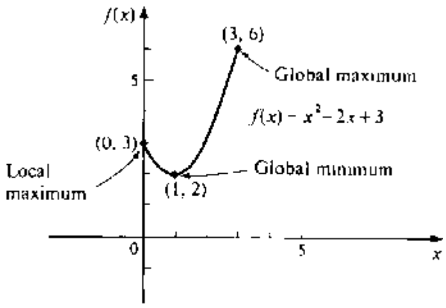


Рис. 2.11

Пример 2.15

Найти максимум и минимум $f(\%) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2$

<u>Решение:</u> Найдем первую производную/'(x) = $3x^2 + 6x + 4$. Уравнение /'(т)==0 не имеет решения, потому что дискриминант отрицательный. $D = 6^2$-4-3-4 = 36-48 = -12. Здесь нет точек, в которых первая производная не существует. Нет критических и крайних точек. Функция не имеет максимума и минимума.

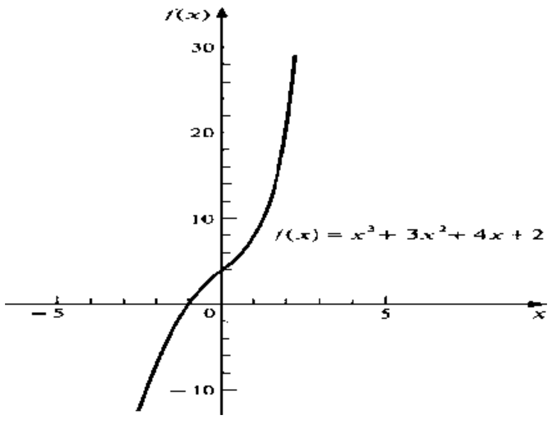


Рис.2.12

Пример 2.16

Найти максимум и минимум /(x) = -.
X

Решение. Найдем первую производную /'(x) = —\. Уравнение —\ = 0 не имеет
X X

решения. Первая производная не существует в x = О(Деление на нуль). Единственная критическая точка x = 0, которая не входит в область определения. Поэтому, x = 0не может быть максимумом или минимумом. Эта функция не имеет максимума и минимума. Рис. 2.13 изображает график этой функции.

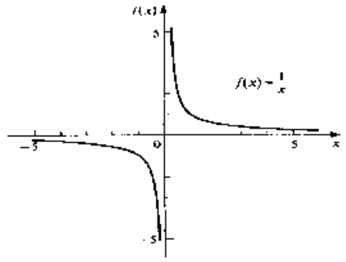


Рис.2.13

Пример 2.17.

Найти максимум и минимум $f(x) =$ $x^2 +4x + 3;x < О$ x^2 $-4x + 3;x > О$
X 7

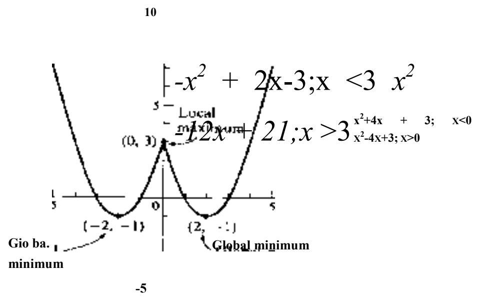
<u>Решение:</u> $f'(x) = <$ $2x + 4;x < О$ $2x-4;x > О$ Назначим первую производную равной нулю и ре

шим 2x + 4 = 0; x = -2 или 2x - 4 = 0; x = 2. Первая производная не существует в x = 0 (Правосторонний и левосторонний пределы не равны в x = 0). Оценим первую производную вокруг точек x = -2,x = 0 и x = 2 . 3) = 2-(—3) + 4 = —2
,
/'(-1) = 2-(-1) + 4= 2, /'(-1) = 2-(-1) + 4 = 2, /'(1) = 2-1-4 = -2, /'(1) = 2-1-4 = -2. У этой функции нет крайних точек.

Заключение. Знак первой производной изменился с отрицательного на положительный вокруг x = -2 и x = 2; эти точки минимума. Знак первой производной изменился с положительного на отрицательный вокруг x = 0; эта точка максимума. Так как нет других критических и крайних точек, там нет других максимума и минимума. Рис. 2.14 изображает график этой функции. /(-2) = $(-2)^2$+4-(-2) + 3 =-1; /(0) = 0^2 +4-0 + 3 = 3; /(2) = 2^2-4• 2 + 3 = -1

Поэтому (-2,-1) и (2,-1)- координаты минимума и (0,3)- координаты максимума.

Рис. 2.14 изображает эту функцию. Точки (-2,-1) и (2,-1)- ниже всех точек и поэтому являются глобальными минимумами. (0,3) не выше всех точек и, поэтому она локальный максимум.



$-x^2 + 2x-3; x < 3$ x^2 $-12x+21; x > 3$

Рис.2.14

Пример 2.18

Найти максимум и минимум $f(x) = <$

Решение: $f'(x) = <$ $\begin{matrix} -2x + 2; x < 3 \\ 2x-12; x > 3 \end{matrix}$. Назначим первую производную равной нулю и решим $-2x+2 = 0$; $x = 1$ $2x-12 = 0$; $x = 6$. Первая производная не существует в $x = 3$(Правосторонний и левосторонний пределы не равны в $x = 3$). Оценим первую производную вокруг каждой из точек: $x = 1$, $x = 3$ и $x = 6$.

/'(0) = -2-0 + 2 = 2; /'(2) = -2-2 +2 =-2; /'(2) = -2-2 + 2 = -2; /'(4) = 2-4-12 = -4;

$f'(5) = 2\text{-}5\text{-}12 = -2;$ /'(2) = 2-7-12 = 2. У этой функции нет крайних точек. Заключение.

Знак первой производной изменился с положительного на отрицательный в $x = 1$; эта точка максимума. Знак первой производной не изменился в $x = 3$; эта точка не является ни максимумом, ни минимумом. Знак первой производной изменился с отрицательного на положительный в $x = 6$; эта точка минимума. Рис. 2.15 изображает график этой функции. График подтверждает утверждение, что эта функция не имеет максимум или минимум. Найдем /(1) = $-1^2+2\text{-}1\text{-}3 = -2$ и/(6) = $6^2\text{-}12\text{-}6 + 21 = -15$

Поэтому (1,-2) - координаты максимума и (6,-15)- координаты минимума.

Рис. 2.15 изображает эту функцию. Точки (1,-2) и (б,-15)не выше и не ниже остальных точек, соответственно и, поэтому являются локальными максимумом и минимумом соответственно.

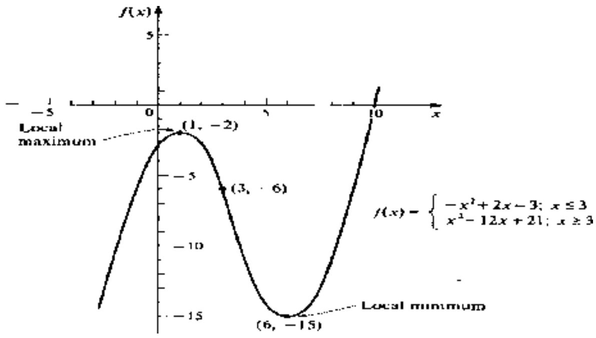


Рис.2.15

Важно осознавать, что нам не нужно строить график для нахождения максимума и минимума. Достаточно проверить первую производную. Это важно, потому что в бизнесе и экономическом анализе, мы будем заинтересованы в максимуме и минимуме функций. Проверка первой производной дает нам способ нахождения только этих точек без графика всей функции. Это особенно важно, когда функция сложная и трудная для построения графика. Графики включены в обсуждение каждой функции только как наглядное представление, чтобы убедиться самим, что анализ был правильным. Также польза графика в том, чтобы определить была ли точка локальным или глобальным максимумом или минимумом.

Пр. р. №38. Исследование функций и построение их графиков с помощью производной.

Задание 1. Ответить устно на следующие вопросы:

1) Сформулируйте теорему, выражающую достаточное условие возрастания (убывания) функции.

2) Какие точки называют критическими?

3) Дайте определение точек минимума и максимума.

4) В чем различие понятий «точка экстремума функции» и «экстремум функции»?

5) Сформулируйте достаточное условие существования экстремума функции.

Задание 2. Используя первую производную, найдите максимум и минимум следующих функций.

1. $f(x) = x^2 - X + 1$	2. $f(x) = y/4-x^2$	3. $f(x) = y/x^2 -4$
4./(л) = 2л^3-3л^2+3	5. f(x) = 2л^2 - л^4	6./« = (* + 4)$^{2/s}$

7.3. $f(x) = x^3 - 27x + 36$	8./(x) = x^{V4}	9. $f(x) =$ — x^5 +-x^3 -6x + 2 5 3
10. /(x) = $x^{4\,5}$-8x^6+16	11./« = (! +4+	12./(*) = -x^2-5;x<3 x^2 - 2x +1; x > 3
13. /(x) = $(x + 1)(x-2)^2$	14. /(x) = $3x^2 - 2x^3$	15./(x) = - x^2 - 2x; x < — 2 ₂о 50 5 —x +8x---- ;x>- L 4 2
16. /(x) = $x^4 - x^3$	17. /(x) = $x^3 + 4x^2 - 3x - 9$	18./(x) = - —x^3 ч—x^2 + 6x + 2, x^3 + 2 2 ₂о 83 3 x -8xч—;x>- L 4 2

Задание 3. Изучите схему исследования функции.

Схема исследования функции:

1) Область определения;
2) Четность, нечетность; периодичность;
3) Пересечение графика с осями координат;
4) Нахождение производной;
5) Нахождение критических точек функции;
6) Нахождение промежутков возрастания и убывания функции;
7) Нахождение экстремума, экстремум функции;
8) Построение графика функции.

Задание 4. Рассмотреть пример демонстрационного варианта, обращая внимание на этапы решения и их запись.

Выполнение демонстрационного варианта

4сследовать функцию *f* (x) =

5 *D(y) = R.*

6 Ни четная, ни нечетная; не периодическая.

———$x^2 = 0$; $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 = 0$ 4
3

$$x^2(3x^2-4x-12) = 0$$

x^2 и построить ее график:

3) Нули функции:

$= 0$, x = *0илих =* $\frac{2 + V4 + 36}{3}$ $\frac{2 + л/40}{3}$ $\underline{2 + 6,3}$

Xj « 2,8; x_2 « -1,4.

Пересечение с осью Оу: x = o, *y* = o

4) Найдем производную: $f'(x) = (\frac{X^4\ X^3}{\quad} - x^2)' = x^3 - x^2 - 2x$

5) Критические точки:

x^3 - л'^{2} - $2x$ = 0; x (л^2 - л - 2) = 0

1±л/Г+8 1 + 3

x = 0; x - x - 2 = 0; x = .x =2;x$_3$ =-1.

6) Составим таблицу:

X	(-оо;-1)	-1	(-1;0)	0	(0;2)	2	(2;+оо)
/'О)	-	0	+	0	-	0	+
/О)		5 12	**у**	0		8 3	

Задание 5. Исследуйте и постройте графики функций 1-18 из задания 2 (по вариантам).

Экономические приложения максимума и минимума

Рассмотренные в разделе 2.3.2 понятия и процедуры могут быть приложены к функциям суммарных издержек, суммарных доходов и суммарной прибыли. В нижерасположенных примерах мы будем использовать проверку первой производной для нахождения максимальной и минимальной оценки функций. Если не указано другого, X представляет количество единиц, а C(x),7?(x)и *P(x)* представляют собой суммарные издержки, суммарные доходы и суммарную прибыль соответственно, в ден. ед.

Минимум стоимости

Пример 2.19

Найдите точку минимума затрат, используя функции суммарных издержек $C(x)$ = 200 + $3x$ -0.01л^2; 0 < x < 150

Решение: C"(x) = 3-0,02x;3-0,02x = 0;x = 150. Эта функция имеет две крайние точки, я = 0и л = 150. C'(Ю) = 2.8;C'(140) = 0.2

Заключение, а) Знак первой производной чуть справа от л = 0 положителен; функция возрастает в сторону от левой крайней точки. Поэтому левая крайняя точка $x = 0$ является минимумом.

б) Знак первой производной чуть левее от точки л = 150 положителен; функция возрастает к правой крайней точке. Поэтому правая крайняя точка л = 150 является максимумом.

Оценивая функцию суммарной стоимости в единственной точке минимума, мы находим C(0) = 200. Это точка (0,200) является также глобальным минимумом.

Эта точка минимальных затрат, когда произведено нуль единиц, суммарные издержки 200 ден. ед. График этой функции представлен на рис. 2.16

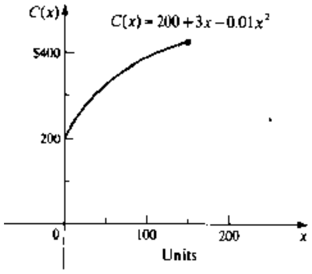


Fig. 3.3.1

Рис.2.16

Пример 2.20

Найдите точку минимума затрат функции суммарных издержек C(x) =

|[x,C(x)] *C(x)* = 30 + 0.40x + 0.001x ;x>oj

1. Решение: *C* '(x) = 0,40 + 0,02x; 0,02x = -0,400; x = -20. Оценим первую производную вокруг критической точки. Заметим, что -20 не входит в область определения этой функции; поэтому этот шаг не будем выполнять. Оценим первую производную чуть правее от x = 0. C'(10) = 0.60.

Заключение. Знак первой производной чуть справа от x = 0 положителен; функция возрастает в сторону от левой крайней точки. Поэтому левая крайняя точка x = 0 является минимумом. Оценим функцию суммарной стоимости в единственной точке минимума C(0) = 30; Это точка (0,30) является также глобальным минимумом. Эта точка минимальных издержек, когда произведено нуль единиц суммарных издержек 200 ден.ед. График этой функции представлен на рис. 2.17(а).

В реальности определенные условия, свойственные специфическим ситуациям, могут накладывать ограничения на количество произведенных изделий. Такие ограничения могут быть результатом времени, состояния рынка, правительственных ограничений или других факторов производственных процессов. Для иллюстрации этого, положим в примере 2.20, что, управление находит необходимым ограничение до 200 единиц.

Пример 2.21. Найдите точку минимума издержек функции суммарных издер жек C(x) = |[x,C(x)] C(x) = 30 + 0.40x + 0.001x ;0 < x <200 j

Решение: Надо оценить первую производную чуть левее от правой крайней точки, x = 200. Тогда функция будет иметь минимум в (0,30) и максимум в (200,510). Поэтому, мы заключаем, что имеем минимальные издержки, когда произведено нуль единиц при суммарных издержках 30 ден. ед. График этой функции представлен на рис. 2.17(б).

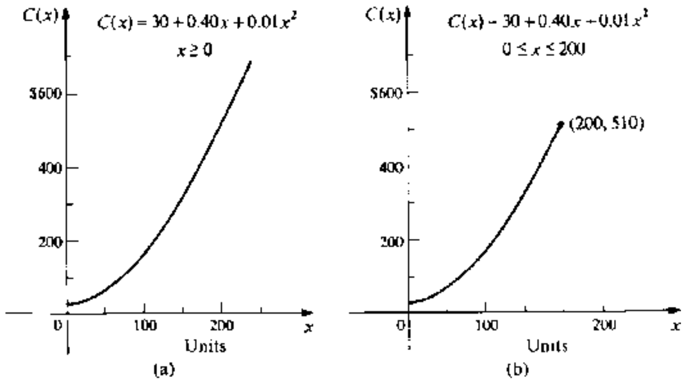


Рис. 2.17

Во всех вышерасположенных иллюстрациях, графики ясно указывают, что минимум стоимости происходит в левой крайней точке функции, что утверждает, что суммарные издержки увеличиваются, когда производится больше единиц продукции.

Максимум доходов и прибыли

Управление может не столько быть заинтересовано в минимизации суммарных издержек, сколько в максимизации суммарных доходов и прибыли.

Пример 2.22 Найдите точку максимума прибыли, используя функцию суммарной прибыли

$P =$ $= -O.Olx^2 +1.40x-30;x > oj$

Решение: P'(ˣ) = ˉ0.02x-1.4; -0.02+1.4= 0;-0.02x+1.4= 0;x= 70. Нет точек, в которых первая производная не существует. Оценим первую производную вокруг критической точки P'(60) = 0.20; P'(80) = -0.20. Эта функция имеет левую крайнюю точку x = 0. Оценим P'(Ю) = Г2 правее этой точки.

Заключение, (а) Знак первой производной меняется с положительного на отрицательный в x = 70; поэтому з максимумом, (б) Знак первой производной чуть правее точки + функция возрастает в сторону от левой крайней точки. Поэтому ле = 0 является минимумом. Оценив функцию суммарной прибыли в е максимума, мы находим P(70) = 19; То есть, максимальная прибыль п единиц произведено и продано с суммарной прибылью 19 ден.ед.. ии представлен на рис. 2.18.

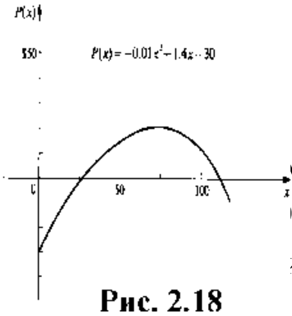


Рис. 2.18

Пр. р. № 39. Решение прикладных задач на нахождение наибольших и наименьших значений реальных величин.

Задание 1. Изучите [1, с. 185-190]

Задание 2. Вопросы и упражнения: [1, с. 191]

Задание 3. Повторите алгоритм нахождения наибольшего и наименьшего значения функции с помощью производной. Изучите примеры демонстрационного варианта.

Пример 1. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^4-2x^2+3$ на отрезке xС [-4;3];

Решение. Чтобы найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке, необходимо сравнить значения функции в критических точках, принадлежащих отрезку, и в концах отрезка.

Найдем производную функции $f'(x) = (x^4-2x^2+3)'=4x^3-4x = 4x(x^2-1) = 4x(x-1)(x + 1)$ и точки, в которых она обращается в 0: *если* x = о, x = 1, x = -1

/(-4) = $(-4)^4 - 2 \cdot (—4)^2 + 3 = 227$;

/(-1) = $(-1)^4 -2 \cdot (-1)^2 +3 = 2$; /(1) = $I^2 - 2 \cdot 1 + 3 = 2$;

Л0) = 3; Л3) = $3^4 -2 \cdot 3^2 +3 = 66$;

Ответ: min $f(x)_{[-4;3]}$=f(-l)=f(l)=2; max $f(x)_{[-4;3]}$=f(-4)=227.

Пример 2, Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен *P*. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

Решение. Составим математическую модель задачи:

Пусть радиус полукруга равен *x,* то есть x=R.

Тогда выразим высоту $H = \dfrac{P — Пx — 2x}{}$. Чтобы окно пропускало наибольшее ко личество света, площадь окна должна быть наибольшей:

$S = тг- \dfrac{X^2}{} + 2x- 2 \quad P\text{-}Пx\text{-}2x \; л \; x \quad + Px\text{-}Пx -2x$

Найдем производную 5 ' (x) = $Пx + P - 2Пx -4x = P-(П + 4)x.$

Производная обращается в 0, если P - (77 + 4)x = о, т.е. $x = \dfrac{P}{}$

Функция $S_n(x)$ имеет одну критическую точку, и в ней, максимум, значит, в ней наибольшее значение. Высота окна при этом будет равна $H = \dfrac{P}{}(1- \dfrac{П + 2}{}4)$

Ответ: $\dfrac{2P}{П + 4'}$

Задание 4. Вопросы и задачи для самопроверки

В заданиях 1-12, используя первую производную, найти точки минимума стоимости.

1. С(Л)=100 + 3л-0.02л^2; 0<л<75.
2. С(л) = 10 + 0.6л-0.01л^2; 0<л<75.
3. С(л) = ^(л^2+ 6л + 200); 0<л<50.
4. С(Л)=1000 + 25л-0.025л^2;

0 < *x* < 500.

5. С(Л) = 0.003л^2+0.12Л + 300;

0 < *x* < 300.

6. *С(х)* = 50-ЮЛ-Л^2 ; 2.5<л<10.

7. С(л) = 10 + 30л-12л^2 +2л^3; 0<л<4.
8. С(л) = 6л-4л^2 + л^3 ; 0<л<3.
9. С(л) = 4 + 2л-— ; 0<л<2.
л^2

С(л) = ^-(л-2л + 9) ; 1<л<2.

11 С(л) = 15 +8л-4л^2 + л^3; 0<л<5.

12 С(л) = л^3 -2л^2 +л + 3 ; 0<л<2.

Найдите точки максимума доходов в заданиях 13-16, используя проверку пер вой производной.

13. *Р(х)* = 8л-0.03л^2.
14. *Р(х)* =-0.01л^2 +45л.
15. *R(x)* = 5.5л-0.01л^2.
16. Л(л) =-2л^2+18л; 0 < л < 4.

В заданиях 17-20, используя проверку первой производной, найти точки максимума прибыли.

17. *Р(х)* = 18л-0.015л^2.

18. Р(л) = -0.003л^2 + 6л-700.

19. *Р(х)* = -4л^3 +5л^2 +2л.

ч л^3 11л^2

20. *Р(х)* = ------1 --------6л-5.
3 4

В заданиях 21-24, используя первую производную, найти точки максимума прибыли; получив ответ, установить значения предельного дохода, равным предельной стоимости.

21. С(л) = -0.001л^2 +1.20л + 60; Л(л) = 5л.
22. Л(л) = 20.00л;С(л) = 500 + 2л-0.02л^2; 0 < л < 50.
23. С(л) = 0.01л^3 -1.50л^2 + 75л +100; Л(л) = 27л.
24. Л(л) = 60л - 0. 3л^2; С(л) = 300 + 45л - 0.15л^2;
25. Фирма использует функцию суммарной прибыли Р(л) = 96л/л-8л. Найдите точку максимума прибыли.
26. Найдите точку максимума стоимости, используя функцию суммарной **стоимости** С(л) = *у/х + 36.*
27. Найдите точку максимума прибыли, используя функцию суммарной прибыли Р(Л) = 9л-0.2л$^{3/2}$.

28. Компания продает все единицы товара по $10 за единицу. Функция суммарной стоимости С(л) = 4л + -(20 + 0.2л)$^{3/2}$. Как много единиц должно быть 6 сделано и продано, чтобы получить максимум прибыли?

29. Найдите точку минимума стоимости, используя функцию 2
C(x) = x -------- н20;л >1.
x

30. Как много единиц продукта должно быть сделано и продано для реализации максимума прибыли, если функция прибыли Лл) = Ал + 2 ;

20 *60-x*

0 < *x* < 40.

Тема 2.3 Интеграл и его приложения

Литература: [1, с. 191-193]

Вопросы и упражнения: [1, с. 193]

2.3.1 Понятие и свойства неопределенного интеграла. Основные формулы интегрирования.

Если для данной функции *y* = /(л) существует функция *F(x),* такая что *F* '(л) = /(%), то ее называют **первообразной** для функции *У* = /О) •

Процедуру нахождения первообразных называют *интегрированием.*

Дифференцирование

F(x) .-- 1 /(x)

Интегрирование

Если к первообразной добавить любое постоянное число, то снова возникает первообразная для той же функции: *F'(x) = f(x)* для тождественно постоянной С следует (F (x) + C)' = /(%).

Предположим теперь, что *F^и* $F_2(x)$ - две первообразные для /(т). Тогда для их разности имеем (Д (л) - F_2 (%))'=/О)- /(л)=0. Однако функция, у которой производная равна нулю во всех точках, является тождественно постоянной, так как ее приращение при изменении *x* тождественно равно нулю. Поэтому делаем вывод: если для функции /(я) существует первообразная *F(x),* то существует семейство первообразных, зависящее от произвольной постоянной С, имеющее вид $F(x) + C$ и называемое неопределенным интегралом от /(л). Причем любые две первообразные для данной функции отличаются лишь постоянным слагаемым. Для обозначения такого семейства первообразных принята запись J $f(x)dx= F(x) + C,$ где J - специальный знак интеграла; $f(x)$ называется подынтегральной функцией, а /(л) dx - подынтегральным выражением.

Основные свойства неопределенного интеграла:

1. Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению: (/(л)й&с) = /(%), $f(x)dx = f(x)dx$
2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен этой функции, сложенной с произвольной постоянной, т.е. J"$dF(x) = F(x) + C$
3. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:
4. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы функций равен такой же

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

алгебраической сумме неопределенных интегралов от каждой функции: J (Л (*)+Л (*))<&=J fi +J Л

Интегралы некоторых элементарных функций

, = arcsin $u + C$

1) du-U + C 2) ^$u^a du = \frac{u^{\alpha-1}}{\alpha+1} + C \ (\alpha \neq -1)$ 3) $\int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

D$\int \frac{du}{}$

11) I -----$^{= arct}S^{11} + C$

4) $\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C$ 5) $\int e^u du = e^u +$ 6) fsinz/ du = -cosz/ +

7) I $cosudu$ = sinz/ + C 8) f ^{au} $\cos^2 u$ 9) $\int \frac{du}{\sin^2 u} = -ctg\, u + C$

$$\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

1+M

2.3.2. Методы интегрирования

1. Непосредственное интегрирование - такой способ интегрирования, при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральной функции и применения свойств неопределенного интеграла приводится к одному или нескольким табличным интегралам.

Пример 3.1. Найти интеграл $\int(5x^3+3x+\frac{2}{x}-e^x+8)dx$

Решение: Применяя свойства неопределенного интеграла, а затем последовательно формулы 2), 3), 5), 1), получим

$$\int(5x^3+3x+\frac{2}{x}-e^x+8)dx=5\int x^3dx+3\int xdx+2\int\frac{dx}{x}-\int e^xdx+8\int dx=$$

$$=5\cdot\frac{x^4}{4}+3\cdot\frac{x^2}{2}+2\ln|x|-e^x+8x+C.$$ Ответ: $\frac{5x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}+2\ln|x|-e^x+8x+C$

2. Интегрирование подстановкой (замены переменной). Сущность этого метода заключается в том, что путем введения новой переменной удается свести данный интеграл к новому интегралу, который сравнительно легко берется непосредственно.

Для интегрирования методом подстановки можно использовать следующую схему:

1) часть подынтегральной функции надо заменить новой переменной;

2) найти дифференциал от обеих частей замены;

3) все подынтегральное выражение выразить через новую переменную (после чего должен получиться табличный интеграл);

4) найти полученный табличный интеграл;

5) сделать обратную замену.

Пример 3.2. Найти J sin *x* cos *xdx.*

z^2 1

Решение. Г sin *x* cos *xdx* = *\Пусть* sin *x = t, тогда* cos *xdx = dt* = *\tdt* = —н *C* = — sin^2 *x* + *C.*

Ответ: -sin^2^ + C.
-----------2

3.Интегрирование по частям основано на формуле **J *udv = uv — j vdu* Пример 3.3.**

Найти *^x cos xdx.*

Решение. Интеграл содержит произведение двух функций- ***x*** и ***cosx.*** Применяем формулу интегрирования по частям, приняв *u = x,dv = cosxdx.* Тогда *du = dx,v =* J*cosxdx =* sin^. Получаем ^sin^-= *x***sinл +** COST + *C* Ответ: x sin x + cos ***x + C.***

Пр. р. №40. *Нахождение неопределенных интегралов методом непосредственного интегрирования и методом подстановки.*

Задание 1. Ответьте на вопросы и решите задачи для самопроверки.

1. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
2. Найдите первообразные для функций: 3, $4^{\wedge 2}$,COST,2/^ .
3. Какая из двух функций **5 $л^{-4}$** и x^5 *+4* является первообразной для другой?
4. Почему при интегрировании функций появляется произвольная постоянная?
5. Почему одна функция имеет целую совокупность первообразных?
6. Что называется неопределенным интегралом?
7. Напишите основные формулы интегрирования.
8. Как доказать справедливость каждой формулы интегрирования?
9. Почему и^-1для интеграла *$fx^n dx$?* В какой формуле рассматривается этот случай?
10. Запишите неопределенные интегралы для выражений: а) 3smxtfc; б) в) , x *dx x dx* , л/ЙП
11. Какие из следующих равенств записаны верно, а какие нет: а) f *x^dx* = $3л^2$ + C; б) f — = In *x* + *C* в) f (1 + *x)dx* = л + — + C ?
12. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?
13. Как из семейства интегральных кривых выделить одну из них?
14. В семействе кривых *y* = J*xdx*найдите кривую, проходящую через точку (2;3).
15. Скорость прямолинейно движущейся точки меняется по закону v = $3t^2$ +1. Найдите закон движения.

16. Найдите I (2л+ 3) *dx.* 4

Пр. р. №41. Вычисление неопределенного интеграла методом интегрирования по частям.

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы.

Задание 2. Найти: а) ^*xe^{x}dx*\ б) j\$^2$ sin *xdx* (формулы интегрирования по частям примените дважды).

Пр. р. №42. Вычисление определенного интеграла.

Задание 1. Обратите на запись решения при нахождении определенного интеграла.

Пример, f U^7-л')б/л'. Решение: *f(x^7-x^3)dx = (—* ill =---=-—- =
—* ----- J -------------- o 8 4 |0 8 4 8 8

Ответ:
---------- 8

Задание 2. Вычислить интегралы: а) J(т^2 - — н—~*T=)dx* ; б) J *xdx* A/COST sin ¡ 4

Пр. р. №43. Вычисление площадей плоских фигур с помощью определенного интеграла.

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы.

Задание 2. Вычислить площадь, ограниченную графиками функций:

$$y = x^2 \text{-} y = x\text{-}$$

Ответ: 1/6 кв.ед.

Задание 3. Вычислить площадь S, заключенную между линиями:

у = 2-л^2;у^3 =л^2.

Ответ: 2—*ed.dd*
-------- 15

Подготовка к контрольной работе №2.

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций и учебнику [1].

Задание 2. Вычислить:

а) значение производной функции $f(x)=3x^2-25x+8$ при $x_0=1,5$;

б) значение производной функции *f(x) = —* -------- при $x_0 = 2$.
x +1

в) тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = 3\ln x$ в точке с абсциссой $x_0=1$;

г) найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^3+3x$ на отрезке xC [0;2];

Задание 3. Проверьте свое решение и ответы по демонстрационному варианту.

а) значение производной функции f(x)=3x-25x+8 при $x_0=1{,}5$;

Решение:

Найдем производную функции /' (%) = *бх* - 25 /'(1,5) = 6-1,5-25 =-16.

Ответ: -16.

б) значение производной функции $f(x) = \dfrac{3x + 4}{x^2 + 1}$ при $x_0 = 2$.

Решение. Найдем производную функции

$$\frac{(3x + 4)'\,(т^2 +1) - (3x + 4)(л^2 +1)'}{(л^2+1)^2} = \frac{3(л^2 +1) - (3л + 4) \bullet 2л}{(л^2+1)^2} = \frac{3л^2 + 3 - 6л^2 - 8л}{(л^2+1)^2} = {}^{Л}“$$

-3x -8л + 3 г-г

= (ЛЧВ-- ~~Тогда~~ /'<2> = $\dfrac{-3\text{-}2^2\text{-}8\text{-}2 + 3}{(2^2 +1)^2} = -1$

Ответ: -1.

в) тангенс угла наклона касательной к графику функции $f(x) = 3\ln x$ в точке с абсциссой $x_0=1$;

Решение. Геометрически производная функции $f(x) = 3\ln x$ в точке с абсциссой $x_0= 1$ представляет угловой коэффициент касательной к графику функции,

т.е. $f'(x) = tg\alpha$. Найдем производную /'(/) = -. /(!) = $\dfrac{3}{x}$= $\dfrac{3}{1}$= 3. Ответ: 3.

г) найти наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)=x^3+3x$ на отрезке xC [0;2];

Решение. Чтобы найти наименьшее и наибольшее значения функции на отрезке, необходимо сравнить значения функции в критических точках, принадлежащих отрезку, и в концах отрезка. Найдем производную функции $f(x) = (x^3 + 3л)'=3/^2 + 3 = 3(л^2 +1)$ и точки, в которых она обращается в 0, однако в данном случае производная не обращается в 0, а везде положительная, значит, функция возрастает. /(0) = 0 /(2) = 14.

Ответ: max $f(x)_{[0\text{-}2]}=f(2)=14$; min $f(x)_{[0\text{-}2]}=f(0)= 0$

д) $\int_o^{n/ /2} \sin 2x dx.$

Решение. $\int^{u/ r} \sin 2x dx — -\frac{1}{}\cos 2x$ = --j(cos(2-(ZZ72))-cosO) = --j-(-2)=l.

Ответ: 1.

Раздел 3. Элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики

Тема 3.1 Элементы комбинаторики

Литература: [1, с. 64-74]

Вопросы и упражнения: [1, с. 74-75]

Изучаемые вопросы: Элементы комбинаторики. Понятие факториала. Перестановки. Размещения. Сочетания.

Пр. р. №44. Решение задач на подсчет числа размещений, перестановок, сочетаний.

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций и учебнику [1, с. 64-69].

Задание 2. Вопросы и упражнения: [1, с. 67, с. 70]

Задание 3. Составьте три задачи на размещения, перестановки, сочета ния.

Пр. р. №45. Решение простейших комбинаторных задач методом перебора и с использованием формул.

Задание 1. Изучите вопрос «Из истории комбинаторики» [1, с. 75-76]. **Задание 2.** Выполните самостоятельную работу по своему варианту.

1 вариант. Решите задачи:

1) Сколькими способами можно выбрать старосту и его заместителя из группы в 15 студентов?
2) Сколькими способами можно заполнить лотерейный билет «5 из 36»?
3) Сколькими способами можно расставить на полке 6 книг?

2 вариант. Решите задачи:

1) Сколькими способами можно расположить цвета радуги в произвольном порядке?
2) Сколькими способами можно выбрать капитана команды и его помощника из членов команды в 12 человек?
3) Сколькими способами можно выбрать трех дежурных, если в классе 30 учащихся?

3 вариант. Решите задачи:

1) Сколькими способами можно выбрать двух человек в президиум, если на собрании присутствует 78 человек?
2) На праздничный стол решено подать по очереди три десерта. Сколькими способами это можно сделать, если имеется 10 наименований десертов.
3) Сколько существует способов рассадки семерых гостей на семи местах праздничного стола?

4 вариант. Решите задачи:

1) В соревнованиях участвовало четыре команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?
2) Сколько вариантов расписания можно составить на один день, если всего имеется 8 учебных предметов, а в расписание на день должно быть только три пары (одна пара - один предмет)?
3) Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

Тема 3.2 Элементы теории вероятностей

Литература: [1, с. 217-74]

Вопросы и упражнения: [1, с. 74-75]

Изучаемые вопросы: Предмет теории вероятностей. Основные понятия и определения. Относительная частота события. Определение вероятности события. Теорема сложения вероятностей. Условная вероятность. Независимые события. Теорема умножения вероятностей. Формула полной вероятности. Формула Байеса.

Пр. р. №46. ***Решение задач на расчет вероятностей.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы.

Задание 2. Ответьте на вопросы и решите задачи.

1) Из урны с белыми, черными и синими шарами извлекают один шар. События Ai и A_2 означают появление соответственно белого и черного шаров. Что означает событие A_I+A_2?

2) Событие A означает появление шести очков на верхней грани игрального кубика. Что означает событие A ?

3) Событие A состоит в том, что хотя бы одна из 15 имеющихся лампочек нестандартная. Что означает событие A ?

4) В группе 5 человек учится на отлично, 7 человек - на хорошо и отлично, 15 человек имеют тройки и 3 человека - неудовлетворительные оценки. Определить вероятность того, что вызванный наугад учащийся не имеет ни двоек, ни троек.

5) Из 30 учащихся спортивной школы 12 человек занимаются баскетболом, 15 - волейболом, 5 - волейболом и баскетболом, остальные - плаваньем.

Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только волейболом или только баскетболом?

Какова вероятность, что выбранный наудачу спортсмен занимается хотя бы одним из видов спорта: волейбол или баскетбол?

Какова вероятность того, что выбранный спортсмен занимается плаваньем?

Задание 3. Решите задачи:

1) Вероятность сдачи зачетов 0,8, а вероятность сдачи экзаменов 0,9. Какова вероятность, что учащийся сдаст сессию?

2) Игральную кость бросают трижды. Какова вероятность, что цифра 5 выпадет три раза?

3) Игральную кость бросают трижды. Какова вероятность, что ни разу не выпадет цифра 6?

4) Найти надежность схемы, если ее элементы независимы и вероятность их безотказной работы 0,3;0,5;0,8;0,1;0,2

5) Имеется две урны. В первой урне - 1 белый, 3 черных и 4 красных шара, во второй - 3 белых, 2 черных и 3 красных шара. Из каждой урны достают по шару и сравнивают их цвета. Найти вероятность того, что цвета обоих шаров совпадут.

Пр. р. №47. ***Решение практических задач с применением вероятностных методов.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы.

Задание 2. Решите задачи.

1) Имеется три партии ламп по 20, 30, 50 штук в каждой. Вероятность того, что лампы проработают заданное время, равна для каждой партии соответственно 0,7; 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что выбранная наудачу лампа из ста данных ламп проработает заданное время.

2) С первого станка на сборку поступает 40% изготовленных деталей, со второго - 30%,Ю а с третьего -30%. Вероятность изготовления бракованной детали для каждого станка равна соответственно 0,,1; 0,03; 0,05. Найти вероятность того, что наудачу выбранная деталь окажется бракованной.

3) Имеется пять винтовок, три из которых с оптическим прицелом. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95; без оптического прицела - 0,8. Найти вероятность попадания в цель, если стрелок сделает один выстрел из наудачу взятой винтовки.

4) Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему 3 вопроса.

Тема 3.3 Элементы математической статистики

Литература: [1, с. 223-225]

Вопросы и упражнения: [1, с. 226]

Изучаемые вопросы:

Формула Бернулли. Законы распределения случайной величины. Числовые характеристики случайных величин. Понятие о задачах математической статистики. Генеральная совокупность и выборка. Статистическое распределение. Гистограмма. Полигон. Характеристики положения и рассеивания статистического распределения. Оценка параметров генеральной совокупности по ее выборке. Интегральная оценка. Доверительный интервал и доверительная вероятность.

Пр. р. №48. Расчет вероятности при повторении *испытаний по формуле Бернулли.*

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы.

Задание 2. Решите задачи.

1) Самолет имеет четыре двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя равна 0,95. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном из двигателей. Ответ: 0,1715.

2) Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение 5 дней из 7 перерасхода электроэнергии не произойдет? Ответ: 0,2753.

3) Для нормальной работы на линии должно быть не менее 8 автобусов, а их имеется 10. Вероятность невыхода каждого автобуса на линию равна 0,1. На вероятность нормальной работы в ближайший день. Ответ: 0.9298

4) В цехе имеется три резервных мотора, работающих независимо друг от друга. Для каждого мотора вероятность того, что он включен в данный момент, равна 0,2. Какова вероятность того, что в данный момент включен хотя бы один мотор? Ответ:0.488.

Пр. р. №49. ***Анализ информации статистического характера.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения темы.

Задание 2. Решите задачи.

1) По одному и тому же маршруту в один и тот же день совершают полет три самолета. Вероятность посадки по расписанию для каждого равна 0,7. Составить закон распределения случайного числа самолетов, отклонившихся от расписания.
2) Составить закон распределения вероятностей для случайного числа страниц с опечатками, если в статье 8 страниц, а вероятность, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,01.

Подготовка к контрольной работе №3.

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций и учебнику [1].

Задание 2. Составить таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавшего на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

Задание 3. В смене 7 менеджеров, из которых 4 - мужчин. Наудачу приглашают принять участие в конкурсе 3 менеджеров. Какой закон распределения имеет случайная величина, означающая число приглашенных менеджеров- мужчин?

Задание 4. Решите задачи.

1	Студент знает 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему 3 вопроса.	2	В июле из десяти сотрудников в отпуск могут пойти трое. Какова вероятность у каждого из сотрудников получить этот отпуск?
3	В магазине имеется 30 телевизоров, причем 20 из них импортных. Найти вероятность того, что среди 5 проданных в течение дня телевизоров окажется более 3 импортных, предполагая, что вероятности покупки телевизоров разных марок одинаковы.	4	В среднем по 0,15 договоров страховая компания выплачивает страховую сумму. Найти вероятность того, что из десяти договоров с наступлением страхового случая будет связано с выплатой страховой суммы 3 договора
5	В группе 12 юношей и 10 девушек менеджеров. По жребию выбирается 6 человек для участия в конкурсе. Какова вероятность того, что в числе избранных окажутся 3 юношей и 3девушки?	6	Абонент, забывший одну цифру нужного ему номера телефона, набирает эту цифру наугад. Какова вероятность, что ему придется звонить не более двух раз?
7	Вероятность того, что прибор останется исправным после пяти лет работы, равна 0,1. Какова вероятность того, что из пяти приборов не менее двух останутся исправными после пяти лет работы?	8	В рекламных целях торговая фирма вкладывает в каждую десятую единицу товара денежный приз в размере 1 тыс. руб. Составить закон распределения случайной величины размера выигрыша при пяти сделанных покупках. Найти математическое ожидание этой случайной величины.
8	В отделе 12 сотрудников. На праздник назначается дежурство - два человека наугад. Какова вероятность попасть в дежурство для каждого данного сотрудника?	10	Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что наудачу выбранных 2 билета окажутся выигрышными.
11	Вероятность попасть в кольцо у данного баскетболиста 0,6. Какова вероятность, что из 4 бросков будет ровно 3 попадания?	12	В среднем пятая часть поступающих в продажу автомобилей некомплектны. Найти вероятность того, что среди десяти автомобилей имеют некомплектность три автомобиля

13	В партии 12 стандартных и 3 нестандартные детали. Наудачу выбирается 4 детали. Какова вероятность того, что в числе избранных окажутся 2 стандартные и 2 нестандартные детали?	14	В корзине 10 яблок, из которых четыре зеленых. Наудачу достали три яблока. Найти вероятность того, что хотя бы одно из выбранных яблок зеленое.
15	Вероятность сдачи первого экзамена 0,9, второго - 0,9, третьего - 0,8. Найти вероятность сдачи сессии.	16	Игральная кость подброшена 10 раз. Найти вероятность выпадения единицы 7 раз.
17	В группе 10 менеджеров, из которых четверо имеют стаж работы менее года. Выбрали наугад трех человек для проведения промоакции. Найти вероятность того, что хотя бы один из выбранных молодой специалист.	18	Из 20 сбербанков 10 расположены за чертой города. Для проверки случайным образом отобрано 5 сбербанков. Какова вероятность того, что среди отобранных окажется в черте города 3 Сбербанка?
19	Какова вероятность того, что при пяти подбрасываниях монеты она три раза упадет гербом кверху?	20	В семье 5 детей. Найти вероятность того, что среди этих детей два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.
21	Среди 100 работников есть 5 человек, имеющих высшую квалификацию. Найти вероятность того, что двое приглашенных наугад сотрудника окажутся с высшей категорией.	22	Вероятность того, что нужная студенту формула содержится в I, II и III справочниках, равна соответственно 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что эта формула содержится не менее, чем в двух справочниках.
23	Предполагается, что 0,1 открывающихся новых малых предприятий прекращают свою деятельность в течение года. Какова вероятность того, что в течение года из шести малых предприятий не более двух прекратят свою деятельность.	24	В группе седьмая часть студентов проживает в общежитии. Найти вероятность того, что среди десяти студентов трое проживает в общежитии.

Раздел 4. Стереометрия

Тема 4.1 Прямые и плоскости в пространстве

Изучаемые вопросы:

Аксиомы стереометрии и следствия из них.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве. Угол между прямыми.

Параллельность прямой и плоскости. Параллельность плоскостей.

Угол между прямой и плоскостью. Расстояние от точки до плоскости. Теорема о трех перпендикулярах. Двугранный угол. Угол между плоскостями.

Перпендикулярность прямой и плоскости.

Перпендикулярность двух плоскостей.

Геометрические преобразования пространства: параллельный перенос, симметрия относительно плоскости. Параллельное проектирование. Площадь ортогональной проекции. Изображение пространственных фигур.

Пр. р. №50. ***Анализ взаимного расположения объектов в пространстве.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций и учебнику [1, с. 50-53].

Задание 2. Вопросы и упражнения [1, с. 53].

Пр. р. №51. ***Решение задач на доказательства.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций и учебнику [1, с. 54-55, 86].

Задание 2. Вопросы и упражнения [1, с. 53].

Пр. р. №52. ***Решение задач на нахождение углов и расстояний в пространстве.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций и учебнику [1, с. 58-59].

Задание 2. Вопросы и упражнения [1, с. 59].

Пр. р. №53. ***Построение изображений пространственных фигур.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций и учебнику [1, с. 55-56].

Задание 2. Вопросы и упражнения [1, с. 80].

Тема 4.2 Многогранники

Изучаемые вопросы:

Понятие о геометрическом теле и его поверхности. Многогранники. Вершины, ребра, грани многогранника. Развертка.

Многогранные углы. Выпуклые многогранники. Теорема Эйлера.

Призма. Прямая и наклонная призма.

Параллелепипед. Куб. Пирамида. Правильная пирамида. Усеченная пирамида. Тетраэдр.

Симметрия в кубе, в параллелепипеде, в призме, и пирамиде.

Сечения куба, призмы и пирамиды. Представление о правильных многогранниках (тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр).

Пр. р. №54. ***Построение изображений основных многогранников.***

Пр. р. №55. ***Построение сечений куба, призмы, пирамиды.***

Пр. р. №56. ***Решение задач по теме.***

Пр. р. №57. ***Презентация правильных многогранников.***

Тема 4.3 Координаты и векторы

Изучаемые вопросы:

Прямоугольная (декартова) система координат в пространстве. Формула расстояния между двумя точками.

Понятие вектора в пространстве. Модуль вектора. Равенство векторов. Сложение векторов. Умножение вектора на число. Разложение вектора по направлениям. Угол между двумя векторами. Проекция вектора на ось. Координаты вектора.

Скалярное произведение векторов. Использование координат и векторов при решении математических и прикладных задач.

Движения. Центральная и осевая симметрия. Зеркальная симметрия. Параллельный перенос.

Пр. р. №58. ***Решение простейших задач в координатах.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций и учебнику [1, с. 77-83].

Задание 2. Вопросы и упражнения [1, с. 80, с. 83].

Пр. р. №59. ***Вычисление углов между прямыми и плоскостями.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций и учебнику [1, с. 83-85].

Задание 2. Вопросы и упражнения [1, с. 85-86].

Пр. р. №60. ***Решение задач с помощью движения.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций.

Задание 2. Вопросы и упражнения.

Пр. р. №61. ***Использование координат и векторов при решении прикладных задач.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций и учебнику [1, с. 81-90].

Задание 2. Вопросы и упражнения.

Тема 4.4 Тела и поверхности вращения

Цилиндр. Конус. Усеченный конус. Основания, высота, боковая поверхность, образующая, развертка. Осевые сечения и сечения, параллельные основанию. Шар и сфера, их сечения. Уравнения сферы, плоскости и прямой. Взаимное расположение сферы и плоскости. Касательная плоскость к сфере.

Пр. р. №62. ***Построение сечений тел вращения.***

Пр. р. №63. ***Презентация тел вращения.***

Пр. р. №64. ***Решение задач.***

Тема 4.5 Объемы и площади поверхностей геометрических тел

Объем геометрического тела. Интегральная формула объема. Вычисление объемов тел вращения.

Формулы объема куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, цилиндра. Формулы объема пирамиды и конуса. Объем шара.

Площадь поверхности геометрического тела. Площадь поверхности призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и шара.

Подобие тел. Отношения площадей поверхностей и объемов подобных тел.

Пр. р. №65. ***Вычисление объемов тел вращения с помощью определенного интеграла.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций.

Задание 2. Решите задачу.

1) Алюминиевый провод диаметром 4 мм имеет массу 6,8 кг. Найдите длину провода, если плотность алюминия 2.6 г/см^3.
2) Какое количество нефти (в тоннах) вмещает цилиндрическая цистерна диаметром 18 м и высотой 7 м, если плотность нефти равна 0,85 г/см^3?

Пр.р. №66. ***Решение задач на вычисление объемов куба, прямоугольного параллелепипеда, призмы, пирамиды.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций.

Задание 2. Решите задачу.

Из квадратного листа картона со стороной *а* требуется сделать открытую коробку наибольшей вместимости, вырезав по углам квадраты и загнув выступы получившейся фигуры. Определите размер стороны вырезаемых квадратов. Демонстрационный вариант решения задачи.

Составим математическую модель задачи:

Пусть сторона вырезаемых квадратов равна x. Тогда основание коробки будет равно $(a\text{-}2x)$. Объем коробки $V = abc, T.Q.\ V(x) = x(a\text{-}2x)^2$.

Найдем производную $V'(x) = (x(a\text{-}2x)^2y{=}(a^2x\text{-}4ax^2 + 4x^3)' = a^2 \text{-}8ax + \backslash 2x^2$

$V'(x) = Q, ecmi\ a^2\text{-}8ax{+}Y2x^2 = Q$. Найдем, при каких значениях xвыполняется это равенство.

$D = 64a^2 - 4Sa^2 = 16a^2$

$8a + yll6a^2\ 8a + 4a\ a$ ■$^{V|}$ ~24

24 ~ 2

$x_2 = \dfrac{8a - y/l6a^2}{24} = \dfrac{8a - 4a}{24} = \dfrac{a}{6}$

Ответ: сторона вырезаемых квадратов $\dfrac{a}{6}$.

Задание 3. Решите задачи:

1) Все грани параллелепипеда - равные ромбы, диагонали которых равны 6 см и 8 см. Найдите объем параллелепипеда.

2) Найдите объем наклонной треугольной призмы, если расстояния между ее боковыми ребрами равны 37 см, 13 см и 30 см, а площадь боковой поверхности равна 480 см^2.

3) Основанием пирамиды DABC является треугольник, в котором AB=20 см, AC=29 см, BC=21 см. Грани DAB и DAC перпендикулярны к плоскости основания, а грань DBC составляет с ней угол в 60 градусов. Найдите объем пирамиды.

Пр. р. №67. ***Вычисления объемов пространственных тел при решении практических задач.***

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций.

Задание 2. Составьте математическую модель задачи и решите ее:

Консервная банка имеет форму цилиндра объемом V. Каковы должны быть высота и диаметр основания, чтобы на изготовление пошло наименьшее количество жести? Демонстрационный вариант решения задачи.

Составим математическую модель задачи:

Пусть диаметр основания цилиндра равен x, то есть x=2R. Тогда из формулы объема цилиндра $V = л R^2H$ выразим высоту $H = {}^V = -Ш—$. Чтобы на изготов-

$77 R 77 X$

ление пошло наименьшее количество жести, если площадь полной поверхности

$AV mc x^\wedge -4 V mc x^2$

цилиндра будет наименьшей: $S,, =x$ *тг*---------- - + ------- = — +--------- .

$77 X 2 X 2$

$4V$ $mc x^2 — 4V$

Найдем производную $S'(x) =—m$ $^{+ 7Г x =}$---------------3---- • Производная обращается в *O,*

если

$[4V$

$x = {}^3—$. Функция $S_n(x)$ имеет одну критическую точку, и в ней минимум, зна- V *77*
чит, в ней наименьшее значение. Высота цилиндра при этом будет равна

$H \_4V$ $)^2$ -

77 $\backslash 4V \backslash 77$

<u>Ответ:</u> на изготовление консервной банки пойдет наименьшее количество жести, если диаметр основания и высота цилиндра равны по

$$\sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

Пр.р .№68. *Вычисления площадей поверхностей пространственных тел при решении практических задач.*

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций.

Задание 2. Решите задачу.

Требуется изготовить ящик с крышкой, объем которого был бы равен 72 ni^3 , причем стороны основания относились бы как 1:2. Каковы должны быть размеры всех сторон, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей? Чему она равна?

<u>Демонстрационный вариант решения задачи.</u>

Составим математическую модель задачи:

Пусть одна сторона основания равна *x* см, тогда вторая сторона равна *2xсм.* Так как объем $V = abc$ равен 72сл/^{3}, то высота ящика равна

72 36 o „ 36 36,

—-*см* = — *см,* а значит, площадь ящика равна $S = 2(2x\text{-}x + 2x\text{-} — + x\text{-}—)= 2x$ *x x x*

$4x^2$ ч ------- 1 --(*см*)

144 72

x x

Найдем производную _ 8л^3 функции 5'(л) = (4л^2 +^{2}--------+ —)'=8л--------- ------ --

144 72,, o 144 72

XX XX

-216 _ 8(л^3 -27) .

S'(x) = Q,eaiu x **= 3.** В этой точке наблюдается локальный минимум.

Второе основание равно 2• з *см* = бел/; высота $\frac{72}{3 \cdot 6}$*см* = *4см.*

Значит, размеры ящика с наименьшей полной поверхностью 3 см х 4 см х 6 см. Площадь полной поверхности равна 108 см^2.

Ответ: 3 см; 4 см; 6см; 108 см^2.

Задание 3. Решите задачу.

Определить размеры открытого бассейна с квадратным дном объемом 32м^2 так, чтобы на облицовку его стен и дна пошло наименьшее количество материала.

Подготовка к контрольной работе №4.

Задание 1. Повторите основные теоретические положения раздела по конспекту лекций и учебнику [1].

Задание 2. Решить задачи.

1) Три данные точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.
2) Через вершину *А* ромба *ABCD* проведена прямая *а,* параллельная диагонали *BD,* а через вершину С - прямая *Ъ,* не лежащая в плоскости ромба. Докажите, что: а) прямые *а* и *CD* пересекаются; б) *а* и *Ъ* скрещивающиеся прямые.
3) Гипотенуза прямоугольного равнобедренного треугольника лежит в плоскости *а,* а катет наклонен к этой плоскости под углом 30°. Найдите угол между плоскостью *а* и плоскостью треугольника.
4) Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, если его измерения равны: а) 1, 1,; б) 8, 9, 12; в) 739,7, 9.
5) В правильной четырехугольной призме через диагональ основания проведено сечение параллельно диагонали призмы. Найдите площадь сечения, если сторона основания призмы равна 2 см, а ее высота равна 4 см.
6) Стороны оснований правильной треугольной усеченной пирамиды равны 4 сдм и 2 дм, а боковое ребро равно 2 дм. Найдите высоту и апофему пирамиды.
7) Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак с емкостью 100 литров. При каком радиусе основания на изготовление бака пойдет наименьшее количество материала?
8) Требуется изготовить коническую воронку с образующей *1=15* см. Какова должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?
9) Найти объем цилиндра с радиусом основания 3 см, если известно, что в него вписан конус с образующей 5 см.
10) Площадь сферы равна 324 см^2. Найдите радиус сферы.

ЛИТЕРАТУРА

Основные источники:
1. Башмаков М.И. Математика: учебник для учреждений нач. и сред. проф. образования / М.И. Башмаков. - 8-е изд., стер. - М.: Издательский центр «Академия», 2013. - 256 с.
2. Дадаян А.А. Математика. - М.: ФОРУМ: ИНФРА-М, 2013. - 544 с. - (Профессиональное образование).

Дополнительные источники:

1. Балдин, К. В. Краткий курс высшей математики [Электронный ресурс] : Учебник / К. В. Балдин; Под общ. ред. д. э. н., проф. К. В. Балдина. - 2-е изд. - М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2013. - 512 с. - ISBN 978-5-394-02103-9.
2. Лежнёв, А.В. Высшая математика для экономистов: теория пределов и приложения: Учебник / А.В. Лежнёв. - М.: Магистр: НИЦ ИНФРА-М, 2014. - 240 с.: 60x90 1/16. - (Бакалавриат), (переплет) ISBN 978-5-9776-0307-2, 500 экз.
3. Математика. Часть 1: Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов факультета СП и ДО всех форм обучения. Составитель Никитина А.Л. - Воронеж: Воронежский филиал РГТЭУ, 2009. - 38 с.
4. Никитина А.Л. Решение прикладных задач методом математического моделирования: учебно-методическое пособие для студентов специальностей «Коммерция (по отраслям)», «Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)» / А.Л. Никитина. - Воронеж: Издательско-полиграфический центр «Научная книга», 2012. - 107 с.
5. Шапкин, А. С. Задачи с решениями по высшей математике, теории вероятностей, математической статистике, математическому программированию [Электронный ресурс]: Учебное пособие для бакалавров / А. С. Шапкин, В. А. Шапкин. - 8-е изд. - М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2013. - 432 с. - ISBN 978-5-394-01943-2.