АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ

«Колледж информационных технологий и финансов»

(АН ПОО «Колледж информационных технологий и финансов»)

УТВЕРЖДАЮ

Директор ____________ **Винокурова И.В.**

«20» декабря 2017 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ПРОВЕДЕНИЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ И САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН.01 Элементы высшей математики

(индекс и наименование учебной дисциплины**)**

38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям)

(код и наименование специальности)

Квалификация выпускника Бухгалтер

(наименование квалификации)

Уровень базового образования обучающихся – основное общее образование

Воронеж

2017

Теория пределов

Основными понятиями в этой теме являются понятия предела функции на бесконечности и в точке, понятие непрерывной функции. При решении задач на вычисление пределов функции необходимо обратить внимание на то, что в определении предела функции не учитывается значение функции в предельной точке, т. е. величина limf(x) не зависит от величины f(a). Значение f(a) может и не существовать. Следовательно, под знаком предела можно выполнять тождественные преобразования выражения, не обращая внимания на значение этого выражения в предельной точке, т. к. вблизи этой точки значение выражения определено.

Понятие предела функции в точке используется в определении производной функции, отыскании точек разрыва и вертикальных асимптот, определении непрерывности функции в точке. Понятие предела функции на бесконечности используется для отыскания горизонтальных и наклонных асимптот.

Решение типовых примеров.

Найти указанные пределы

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n^2+n-1}$

Решение.

В данном примере появляется неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$, избавляться от которой можно вынесением за скобки старшей степени переменной n в числителе и знаменателе:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+5}{n^2+n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2(2+\frac{5}{n^2})}{n^2(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2})}=2$$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

Решение.

В данном примере имеется неопределённость $\infty-\infty$. Чтобы избавиться от такой неопределённости, надо числитель и знаменатель данного выражения домножить на выражение, сопряжённое к числителю:

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{5}{x})^{3x}$

Решение.

В данном примере имеется неопределённость 1^{∞}. Чтобы от неё избавиться, используем второй замечательный предел: $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$.

Решение будет выглядеть следующим образом:

$$\lim_{x\to\infty}((1+\frac{5}{x})^{\frac{x}{5}})^{\frac{5}{x}3x} = \lim_{x\to\infty}((1+\frac{5}{x})^{\frac{x}{5}})^{15} = e^{15}.$$

4) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2-x-1}{(x-1)^2}$

Решение.

Для раскрытия неопределённости $[\frac{0}{0}]$ разложим числитель на множители и сократим дробь на множитель (x-1): сокращение возможно, т. к. при x$\to$1 (x-1) стремится к нулю, но не равен нулю.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{2(x+\frac{1}{2})(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x\to 1}\frac{2x+1}{x-1} = \infty$$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$

Решение.

В данном случае для освобождения от неопределённости $[\frac{0}{0}]$ будем использовать первый замечательный предел: $\lim\limits_{a\to 0}\dfrac{\sin a}{a} = 1$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x^2})^2 = \frac{1}{2}1^2 = \frac{1}{2}.$$

Производная функции,
ее геометрический и физический смысл

Производной функции *f(x)* в точке $x = x_0$ называется предел отношения приращения функции в этой точке к приращению аргумента, если он существует:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Пусть *f(x)*определена на некотором промежутке (a, b). Тогда

$$f'(x_0) = tg\alpha,$$

где α - угол наклона касательной к графику функции *f(x)* в точке (x_0, $f(x_0)$).

Уравнение касательной к кривой
$y = f(x)$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Фактически производная функции показывает скорость изменения функции, т.е. как изменяется функция при изменении переменной x

Физический смысл производной функции $f(t)$, где t - время, а $f(t)$ - закон движения по прямой, - мгновенная скорость движения.

Соответственно, вторая производная функции - скорость изменения скорости, т.е. ускорение.

Основные правила дифференцирования

Обозначим $f(x) = u$, $g(x) = v$
- функции, дифференцируемые в точке x_0.

1) $(u \pm v)' = u' \pm v'$
2) $(u \cdot v)' = u \cdot v' + u' \cdot v$
3) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$, если $v \neq 0$

Производные основных элементарных функций

1) $C' = 0$;
2) $\left(x^m\right)' = m \cdot \left(x^{m-1}\right)$;
3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;
4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$;
5) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$;
6) $\left(e^x\right)' = e^x$;
7) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln x}$;
8) $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$;
9) $\left(\sin x\right)' = \cos x$;
10) $\left(\cos x\right)' = -\sin x$;
11) $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
12) $\left(ctgx\right)' = \dfrac{1}{\sin^2 x}$;
13) $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
14) $\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
15) $\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
16) $\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;

Производная сложной функции

Пусть $y = f(x); u = g(x)$, причем область значений функции u входит в область определения функции *y.*

Тогда

$$y' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

<u>Пример</u> .

Вычислить производную функции $y = \dfrac{x^2}{e^x + 1}$. .

$$y' = \frac{\left(x^2\right)'\left(e^x + 1\right) - x^2\left(e^x + 1\right)'}{\left(e^x + 1\right)^2} =$$

$$= \frac{2x\left(e^x + 1\right) - x^2 e^x}{\left(e^x + 1\right)^2}$$

Пример. Найти производную функции $y = \sqrt{3x^2 + 5}$.

Будем рассматривать данную функцию как сложную, составленную из функций $y = \sqrt{u}, u = 3x^2 + 5$.

$$y' = \left(\sqrt{u}\right)'\left(3x^2 + 5\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}} 6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 5}}.$$

<u>Пример.</u> Найти производную функции $y = x\cos x \sin x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x$.

Преобразуем данную функцию: $y = \dfrac{1}{2}x\sin 2x + \dfrac{1}{2}\cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{2}x\, 2\cos 2x + \frac{1}{2}2\cos x(-\sin x) =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + x\cos 2x - \sin x \cos x = x\cos 2x.$$

<u>Пример.</u>Найти производную функции $y = \dfrac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + 1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2 + 1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{2xe^{x^2}(x^4 + 1 + x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

<u>Пример.</u>Найти производную функции $y = \ln tg\dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x\cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{\sin x - \sin x + x\cos x}{\sin^2 x} = \frac{x\cos x}{\sin^2 x}$$

Пример. Найти производную функции $y = arctg\,\frac{2x^4}{1-x^8}$

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} =$$

$$= \frac{(1-x^8)^2(8x^3 - 8x^{11} + 16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3 + 8x^{11}}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}$$

Пример. Найти производную функции $y = x^2 e^{x^2} \ln x$

$$y' = \left(x^2 e^{x^2}\right)' \ln x + x^2 e^{x^2} \frac{1}{x} =$$

$$= \left(2xe^{x^2} + x^2 e^{x^2} 2x\right) \ln x + xe^{x^2} =$$

$$= 2xe^{x^2}(1+x^2)\ln x + xe^{x^2} =$$

$$= xe^{x^2}(1 + 2\ln x + 2x^2 \ln x)$$

Производная второго порядка

Пусть функция *y=f(x)* дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x)$$

Если найти производную функции *f′(x),* получим вторую производнуюфункции *f(x).*

$$y'' = f''(x)$$

т.е. y′′ = (y′)′.

Исследование функций с помощью производной

Возрастание и убывание функций

С помощью производной можно находить промежутки возрастания и убывания функции.

Для этого надо:

1) Найти область определения функции.

2) Найти производную функции и точки из области определения функции, в которых ее производная равна нулю или не существует. Этими точками область

определения разбивается на интервалы, на каждом из которых производная сохраняет свой знак.

3) Определить знак производной на каждом из интервалов. Если на данном интервале производная функции положительна (отрицательна), то на этом интервале функция возрастает (убывает).

<u>Пример</u>. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = \frac{x^2}{2} - 6\ln(x-1)$.

Функция определена и дифференцируема на интервале $(1; +\infty)$. Найдем ее производную: $y' = x - \frac{6}{x-1} = \frac{x^2 - x - 6}{x-1} = \frac{(x+2)(x-3)}{x-1}$.

Уравнение $\frac{(x+2)(x-3)}{x-1} = 0$ имеет два корня x_1 = -2 и x_2 = 3. Однако критической точкой функции будет только x_2 = 3, так как первая не принадлежит к области определения функции. Критическая точка x_2 = 3 разбивает область определения функции на два интервала (1; 3) и $(3; +\infty)$, на каждом из которых производная сохраняет свой знак. Так как $y'(2) = -4 < 0$ и $y'(4) = 2 > 0$, то производная отрицательна на (1; 3) и положительна на $(3; +\infty)$. Следовательно, функция убывает на интервале (1; 3) и возрастает на $(3; +\infty)$.

Точка x_0 называется *точкоймаксимума (минимума) функцииу=f(x),* если для всех $x \neq x_0$ из некоторой окрестности этой точки выполняется неравенство *$f(x)<f(x_0)$ ($f(x)>f(x_0)$)*

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума.*

Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Для нахождения точек экстремума надо:

1) Найти производную и критические точки функции.

2) Определить знак производной в некоторой окрестности каждой критической точки. Если функция непрерывна в критической точке x_0, а ее производная при переходе через точку x_0 меняет свой знак с плюса на минус, то x_0 – точка максимума; если знак меняется с минуса на плюс, то x_0 – точка минимума.

Если знак производной сохраняется при переходе через рассматриваемую точку, то функция не имеет экстремума в этой точке.

На основе вышесказанного можно выработать единый порядок действий при нахождении наибольшего и наименьшего значения функции на отрезке:

1) Найти критические точки функции.
2) Найти значения функции в критических точках.
3) Найти значения функции на концах отрезка.
4) Выбрать среди полученных значений наибольшее и наименьшее.

Исследование функции на экстремум с помощью производных высших порядков

Пусть в точке $x = x_0$производная$f'(x_0) = 0$ и вторая производная $f''(x_0)$ существует и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0.

Если $f'(x_0)= 0$, то функция $f(x)$ в точке $x = x_1$ имеет максимум, если $f''(x_1)<0$ и минимум, если $f''(x_1)>0$.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

Кривая обращена выпуклостью *вверх* на интервале (a, b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется *выпуклой (выпуклойвверх),* а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется *вогнутой(выпуклой вниз).*

Если во всех точках интервала
(a, b) вторая производная функции$f(x)$ отрицательна, то кривая$y = f(x)$ обращена выпуклостью вверх (выпукла).

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой отвогнутой, называется *точкой перегиба.*

Очевидно, что в точке перегиба касательная пересекает кривую.

Пусть кривая определяется уравнением $y = f(x)$. Если вторая производная $f''(a) = 0$ или $f''(a)$ не существует и при переходе через точку $x = a$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x = a$ является точкой перегиба.

Асимптоты

При исследовании функций часто бывает, что при удалении координаты x точки кривой в бесконечность кривая неограниченно приближается к некоторой прямой.

Прямая называется *асимптотой* кривой, если расстояние от переменной точки кривой до этой прямой при удалении точки в бесконечность стремится к нулю.

Следует отметить, что не любая кривая имеет асимптоту. Асимптоты могут быть прямые и наклонные. Исследование функций на наличие асимптот имеет большое значение и позволяет более точно определить характер функции и поведение графика кривой.

Вертикальные асимптоты

Из определения асимптоты следует, что если $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, то прямая x = a – вертикальная асимптота графика функции y = f(x).

Например, для функции $f(x)=\dfrac{2}{x-5}$ прямая x = 5 является вертикальной асимптотой.

Прямая y = kx + b – асимптота графика функции. Для точного определения этой прямой необходимо вычислить коэффициенты k и b.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-kx\right].$$

Пример. Найти асимптоты графика функции

$$y=\frac{x^2+2x-1}{x}.$$

1) Вертикальные асимптоты:
y→+∞ если x→0-0;
y→-∞еслиx→0+0,
следовательно, x = 0- вертикальная асимптота.

2) Наклонные асимптоты:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=1$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{x}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1-x^2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x}\right)=2$$

Таким образом, прямая y = x + 2 является наклонной асимптотой.

Производная и дифференциал (примеры)

Пример 1. Вычислить производную функции $y=\dfrac{x^2}{e^x+1}$ в точке *x* = 0.

Решение: Применяя последовательно правила дифференцирования 4 и 1, а также формулы 2 и 7, получим

$$y'=\frac{\left(x^2\right)'\left(e^x+1\right)-x^2\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{2x\left(e^x+1\right)-x^2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

Отсюда $y'(0)=0$.

Пример 2. Найти производную функции $y = \sqrt{3x^2 + 5}$.

Решение: Будем рассматривать данную функцию как сложную, составленную из функций $y = \sqrt{u}$, $u = 3x^2 + 5$. Тогда, согласно правилу 5, получим

$$y' = \left(\sqrt{u}\right)'\left(3x^2 + 5\right)' = \frac{1}{2\sqrt{u}}6x = \frac{3x}{\sqrt{3x^2 + 5}}.$$

Пример 3. Угол φ поворота шкива в зависимости от времени *t* задан функцией $\varphi = \left(2t^2 + 3t + 1\right)$ рад. Найти угловую скорость ω при $t = 4c$.

Решение: Если $\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)$ - угол поворота шкива за промежуток времени $[t;\, t + \Delta t]$, то $\frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t}$ - средняя угловая скорость шкива, а

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(t)}{\Delta t} = \varphi'(t)$$

- угловая скорость $\omega(t)$ в момент времени *t*. Следовательно, $\omega(4) = \varphi'(4)$ рад/с. Так как $\varphi'(t) = 4t + 3$, то $\varphi'(4) = 19$ рад/с и $\omega(4) = 19$ рад/с.

Пример 4. В каких точках касательные к кривой $y = x^3 + x - 2$ параллельны прямой $y = 4x - 1$?

Решение: Из условия параллельности двух прямых следует, что угловой коэффициент касательных в искомых точках должен быть равен 4. Тогда абсциссы точек касания найдем, используя равенство $y'(x) = 4$, то есть $3x^2 + 1 = 4$, отсюда x_1= 1, x_2= -1. Соответствующие ординаты равны y_1= 0, y_2= -4. Искомые точки $(1;\, 0), (-1;\, -4)$.

Пример 5. Вычислить приближенно значение функции $f(x) = \sqrt{4x^2 + 3x + 2}$ в точке $x = 1{,}003$.

Решение: Значение функции и ее производной

$$f'(x) = \frac{8x + 3}{2\sqrt{4x^2 + 3x + 2}}$$

Легко вычислить при значении $x_0 = 1$, которое близко к $x = 1{,}003$. Поэтому $f(1) = 3$, $f'(1) = 11/6$, $\Delta x = 0{,}003$ и, согласно формуле (1), имеем $f(1{,}003) \approx 3 + \frac{11}{6} \cdot 0{,}003 = 3{,}0055$.

Пример 6. Вычислите приближенно $10^{0,99}$.

Решение: Положим в формуле (1) $f(x) = 10^x$ и $x_0 = 1$. Тогда $f'(x) = 10^x \ln 10,\ \Delta x = -0{,}01$ и $10^{0,99} \approx 10 - 10 \cdot 0{,}01 \cdot \ln 10 \approx 10 - 0{,}1 \cdot 2{,}303 = 9{,}7697$.

Пример 7. Даны два кубика, ребра которых соответственно равны 5 см и 4,98 см. На сколько объем второго кубика меньше объема первого?

Решение: Объем *v* куба с ребром *x* равен v = x^3. Вычислим приближенно приращение этой функции при *x* = 5 по формуле (1). Так как $v' = 3x^2,\ v'(5) = 75,\ \Delta x = 4{,}98 - 5 = -0{,}02$, то $\Delta v(5) \approx 75(-0{,}02) = -1{,}5$, то есть объем второго кубика меньше объема первого приближенно на 1,5 см.

Пример 8. Найти интервалы возрастания и убывания функции $y = \frac{x^2}{2} - 6\ln(x-1)$.

Решение: Функция определена и дифференцируема на интервале $(1; +\infty)$. Найдем ее производную: $y' = x - \frac{6}{x-1} = \frac{x^2 - x - 6}{x-1} = \frac{(x+2)(x-3)}{x-1}$.

Уравнение $\frac{(x+2)(x-3)}{x-1} = 0$ имеет два корня x_1 = -2 и x_2 = 3. Однако критической точкой функции будет только x_2 = 3, так как первая не принадлежит к области определения функции. Критическая точка x_2 = 3 разбивает область определения функции на два интервала (1; 3) и $(3; +\infty)$, на каждом из которых производная сохраняет свой знак. Так как $y'(2) = -4 < 0 \; и \; y'(4) = 2 > 0$, то производная отрицательна на (1; 3) и положительна на $(3; +\infty)$. Следовательно, функция убывает на интервале (1; 3) и возрастает на $(3; +\infty)$.

Пример 9. Доказать, что уравнение $\ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} + x = 1$ имеет единственное решение.

Решение: Функция $f(x) = \ln(x+1) - \frac{2x}{x+2} + x - 1$ непрерывна в своей области определения и $f(0) = -1 < 0, f(2) = \ln 3 > 0$. Поэтому, согласно свойству 3 непрерывных функций, на промежутке (0; 2) существует по крайней мере одна точка x_0 такая, что $f(x) = 0$. Следовательно, x = x_0 является решением нашего уравнения. А так как функция $y = f(x)$ возрастающая ($f'(x) = 1 + \frac{x^2}{(x+1)(x+2)^2} > 0$ при x> -1), то это решение единственное.

Интегральное исчисление
Первообразная функция.

<u>**Определение:**</u> Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Неопределенный интеграл

<u>**Определение:**</u>**Неопределенным интегралом** функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x)+C;$
4. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.
5. $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$

Пример:

$$\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int tgxdx$	-ln│cosx│+C	9	$\int e^x dx$	e^x + C
2	$\int ctgxdx$	ln│sinx│+ C	10	$\int \cos xdx$	sinx + C
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	11	$\int \sin xdx$	-cosx + C
4	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$	tgx + C
5	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\|+C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$	-ctgx + C
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|+C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	arcsin$\frac{x}{a}$ + C
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha\neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x}dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\|+C$	16	$\int \frac{1}{\sin x}dx$	$\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+C$

Методы интегрирования

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Непосредственное интегрирование

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

Способ подстановки (замены переменных).

<u>Теорема:</u> Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

<u>Пример.</u> Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdt*.

$$\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2}x + C.$$

<u>Пример.</u> $\int x(x^2+1)^{3/2}dx.$

Замена $t = x^2 + 1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = \frac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2}=\frac{1}{2}\int t^{3/2}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2}+C=\frac{t^{5/2}}{5}+C=\frac{(x^2+1)^{5/2}}{5}+C;$$

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

(,uv)′ = u′v + v′u

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv)=\int udv+\int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$$uv=\int udv+\int vdu \qquad \text{или} \qquad \int udv=uv-\int vdu\ ;$$

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

<u>Пример.</u> $\int x^2\sin xdx=\begin{Bmatrix} u=x^2; & dv=\sin xdx; \\ du=2xdx; & v=-\cos x\end{Bmatrix}=-x^2\cos x+\int\cos x\cdot 2xdx=$

$=\begin{Bmatrix} u=x; & dv=\cos xdx; \\ du=dx; & v=\sin x\end{Bmatrix}=-x^2\cos x+2\left[x\sin x-\int\sin xdx\right]=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

<u>Пример.</u> $\int e^{2x}\cos xdx=\begin{Bmatrix} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\cos xdx; & v=\sin x\end{Bmatrix}=e^{2x}\sin x-\int\sin x\cdot 2e^{2x}dx=$

$=\begin{Bmatrix} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\sin xdx; & v=-\cos x;\end{Bmatrix}=e^{2x}\sin x-2\left[-e^{2x}\cos x-\int -\cos x\cdot 2e^{2x}dx\right]=e^{2x}\sin x+$

$+2e^{2x}\cos x-4\int\cos xe^{2x}dx$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos xdx=e^{2x}(\sin x+2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos xdx=\frac{e^{2x}}{5}(\sin x+2\cos x)+C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

Пример.

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1=t; \quad dt=2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2}+C = \frac{t^{21}}{42}+C = \frac{(2x+1)^{21}}{42}+C$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| +$$

$$+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

Пример.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int \sin^{-3/2} x\cos x dx = \{\sin x = t; \quad dt = \cos x dx\} = \int t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2}+C =$$

$$= -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}}+C.$$

Пример.

$$\int x^2 e^{5x}dx = \left\{\begin{matrix} u=x^2; & dv=e^{5x}dx; \\ du=2xdx; & v=\dfrac{e^{5x}}{5}; \end{matrix}\right\} = \frac{1}{5}e^{5x}x^2 - \int \frac{1}{5}e^{5x}2xdx = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx =$$

$$= \left\{\begin{matrix} u=x; & dv=e^{5x}dx; \\ du=dx; & v=\dfrac{1}{5}e^{5x}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int\frac{1}{5}e^{5x}dx\right] = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25}\int e^{5x}dx =$$

$$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25}\right).$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \{x+1=t\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3}+C = \arcsin\frac{x+1}{3}+C.$$

Пример.

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left\{\begin{matrix} u=\ln x; & dv=\dfrac{1}{x^3}dx; \\ du=\dfrac{1}{x}dx; & v=-\dfrac{1}{2x^2}; \end{matrix}\right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Пример.

$$\int x\ln xdx=\begin{Bmatrix} u=\ln x; & dv=xdx; \\ du=\dfrac{1}{x}dx; & v=\dfrac{x^2}{2}; \end{Bmatrix}=\frac{x^2}{2}\ln x-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{1}{2}\int xdx=\frac{x^2\ln x}{2}-\frac{x^2}{4}+C=$$

$$=\frac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx=\left\{t=e^{\cos^2 x};\quad dt=-e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x=-\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\right\}=-\int dt=-t+C=$$

$$=-e^{\cos^2 x}+C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int\frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}=\left\{\sqrt{x}=t;\quad \frac{dt}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2t}\right\}=\int\frac{2tdt}{(t^2+1)t}=2\int\frac{dt}{t^2+1}=2arctgt+C=2arctg\sqrt{x}+C.$$

<u>Пример.</u>

$$\int\frac{dx}{x^2-6x+25}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+16}=\frac{1}{16}\int\frac{dx}{\left(\dfrac{x-3}{4}\right)^2+1}=\frac{1}{16}arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C.$$

Интегрирование элементарных дробей.

<u>**Определение:**</u>**Элементарными** называются дроби следующих четырех типов:

I. $\dfrac{1}{ax+b}$; III. $\dfrac{Mx+N}{ax^2+bx+c}$;

II. $\dfrac{1}{(ax+b)^m}$; IV. $\dfrac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}$

m, n – натуральные числа ($m\geq 2$, $n\geq 2$) и $b^2-4ac<0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой t = ax + b.

I. $$\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t}=\frac{1}{a}\ln|t|+C=\frac{1}{a}\ln|ax+b|+C.$$

II. $$\int\frac{dx}{(ax+b)^m}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^m}=-\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}}+C=-\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}}+C;$$

Линейная алгебра

Виды матриц

Определение. Таблица $m\times n$ чисел a_{ij} вида

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{Vmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{Vmatrix}=\left(a_{ij}\right)=\left\|a_{ij}\right\|,$$

состоящая из m строк и n столбцов, называется матрицей.

Числа a_{ij}, стоящие на пересечении i-й строки и j-го столбца, называются элементами матрицы.

Матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_{ij})$ называются равными, если они имеют одинаковые размеры и для каждой пары индексов выполняется равенство $a_{ij}= b_{ij}$.

Нулевой матрицей называется матрица, все элементы которой равны нулю:

$$0=\begin{pmatrix} 0\,0\dots0 \\ 0\,0\dots0 \\ \dots \\ 0\,0\dots0 \end{pmatrix}.$$

Матрица, у которой $m=n$, называется квадратной матрицей n-го порядка.

В квадратной матрице элементы a_{11}, a_{22}, … a_{nn} составляют главную диагональ. Квадратная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, а все остальные элементы равны нулю, называется единичной:

$$E=\begin{pmatrix} 1\,0\dots0 \\ 0\,1\dots0 \\ \dots \\ 0\,0\dots1 \end{pmatrix}.$$

Действия над матрицами

1. *Умножение матрицы на число*

Произведением матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots \\ a_{m1}a_{m2}\dots a_{mn} \end{pmatrix}$ на число λ называетсяматрица

$$\lambda A=\begin{pmatrix} \lambda a_{11}\lambda a_{12}\dots\lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21}\lambda a_{22}\dots\lambda a_{2n} \\ \dots \\ \lambda a_{m1}\lambda a_{m2}\dots\lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ на число λ=3.

$$3A=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -3 & 12 & 15 \end{pmatrix}.$$

2. *Сложение (вычитание) матриц*

Суммой (разностью) матриц*A* и *B*, в каждой из которых *m* строк и *n*столбцов, называется матрица *C*с элементами, равными суммам (разностям) соответствующих элементов слагаемых:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ... \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11}b_{12}...b_{1n} \\ b_{21}b_{22}...b_{2n} \\ ... \\ b_{m1}b_{m2}...b_{mn} \end{pmatrix}, \quad \text{тогда}$$

$$A\pm B=\begin{pmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & ... & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & ... & a_{2n}\pm b_{2n} \\ & & ... & \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & ... & a_{mn}\pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти сумму матриц $A=\begin{pmatrix} 21 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. $A+B=\begin{pmatrix} 20 & 6 & 3 \\ 5 & 5 & 11 \end{pmatrix}$.

3. *Умножение матриц*

Пусть даны матрица $A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ... \\ a_{k1}a_{k2}...a_{kn} \end{pmatrix}$ размерности $k\times n$ и

матрица $B=\begin{pmatrix} b_{11}b_{12}...b_{1m} \\ b_{21}b_{22}...b_{2m} \\ ... \\ b_{n1}b_{n2}...b_{nm} \end{pmatrix}$ размерности $n\times m$.

Пусть число столбцов матрицы*A* совпадает с числом строк матрицы *B* (в этом случае матрицу *A* называют согласованной с матрицей *B*).

Произведением матрицы*A* на матрицу *B* называется такая матрица $AB=C=\begin{pmatrix} c_{11}c_{12}...c_{1m} \\ c_{21}c_{22}...c_{2m} \\ ... \\ c_{k1}c_{k2}...c_{km} \end{pmatrix}$ размерности$k\cdot m$, каждый элемент которой $c_{ij}\,(i=1,...,k;\ j=1,...,m)$ находится как сумма произведений элементов, взятых по порядку из *i*-й строки матрицы *A* и *j*-го столбца матрицы *B*.

Пример. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение: $AB=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot 2+0\cdot 1+1\cdot(-3) & 2\cdot 1+0\cdot 5+1\cdot 2 \\ -1\cdot 2+3\cdot 1+2\cdot(-3) & -1\cdot 1+3\cdot 5+2\cdot 2 \\ 0\cdot 2+1\cdot 1+4\cdot(-3) & 0\cdot 1+1\cdot 5+4\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 18 \\ -11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Решение: $AB=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot 1+3\cdot 3+0\cdot 1 \\ 1\cdot 1+2\cdot 3+4\cdot 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 11 \\ 11 \end{pmatrix}.$

Еще раз отметим, что в матрице-произведении число строк равно числу строк матрицыA и число столбцов равно числу столбцов матрицы B.

Определители

Понятие определителя вводится только для квадратной матрицы и представляет собой число, которое находится по определенному правилу через элементы, составляющие данную матрицу.

Для квадратной матрицы $A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}$ n-го порядка определитель n-го порядка обозначается символом:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

В определителе различают строки и столбцы. Числа a_{ij}(i=1,…,n; j=1,…,n) называются элементами определителя.

Определение. Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя (1) называется определитель (n-1)-го порядка, который получается из определителя Δ путем вычеркивания i-ой строки из j-го столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

Определение. Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется произведение $(-1)^{i+j}M_{ij}$.

Не вводя строгое понятие определителя, дадим лишь правило его нахождения.

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{vmatrix}$ n-го порядка находится по формуле:

$$\Delta = \begin{cases} a_{11}, & \text{при} \quad n=1, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}, & \text{при} \quad n>1, \end{cases} \tag{2}$$

где i- любое из чисел 1,2,…,n, A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

Найдем по формуле (2) определитель 2-го порядка, выбрав, например,i=1: $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1}\cdot|a_{22}| + a_{12}(-1)^{1+2}\cdot|a_{21}| = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Из формулы (2) следует, что вычисление определителей N-го порядка сводится к вычислению определителей (n-1)-го порядка (т.е. миноров). Те, в свою очередь, опять по формуле (2) сводятся к определителям (n-2)-го порядка. Процесс нахождения определителей продолжается до получения миноров 2-го или 1-го порядка. Запись (2) называется разложением определителя по элементам i-ой строки.

Пример. Вычислить определитель третьего порядка $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение: $$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} =$$
$$= 2\cdot(-1-10) - 3\cdot(0-20) + 1(0-4) = 34.$$

Разложение было выполнено по элементам 1-ой строки.

Заметим, что если некоторые элементы строки, по элементам которой производится разложение, равны нулю, то вычисление значительно упрощается. Обычно, пользуясь свойствами определителя, преобразуем его таким образом, чтобы в выбранной строке (выбранном столбце) все элементы кроме одного, равнялись нулю.

Обратная матрица

Определение. Квадратная матрица n-го порядка называется невырожденной, если ее определитель n-го порядка $\Delta \neq 0$. Если определитель матрицы равен нулю, то она называется вырожденной.

Определение. МатрицаB называется обратной для данной квадратной матрицы A, если $AB = BA = E$, где E – единичная матрица. Обратную матрицу для данной матрицыA обозначают A^{-1}, поэтому:

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = E.$$

Если квадратная матрица невырожденная, то для нее существует единственная обратная матрица.

Пусть задана квадратная матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}$.

Тогда обратная матрица A^{-1} находится следующим образом:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11}A_{21}...A_{n1} \\ A_{12}A_{22}...A_{n2} \\ ... \\ A_{1n}A_{2n}...A_{nn} \end{pmatrix},$$

где Δ – определитель матрицы A, A_{ij}– алгебраическое дополнение элемента a_{ij} (i=1,…,n; j=1, …, n). Необходимо обратить внимание, что, находя алгебраические дополнения к элементам строк матрицы A, в обратной матрице A^{-1} мы записываем их по соответствующим столбцам.

Пример. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Проверить результат, вычислив произведение данной и обратной матриц.

Решение. Определитель матрицы A вычислен ранее:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 34.$$

Так, как $\Delta \neq 0$, то матрица A невырожденная и для нее существует обратная.

Найдем алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 10 = -11; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -(0 - 20) = 20;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 4 = -4; \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-3 - 2) = 5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -2 - 4 = -6; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 12) = 8;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 1 = 14; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -(10 - 0) = -10;$$

$$A_{33} = (-1)^{3-3}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 0 = 2.$$

Следовательно: $A^{-1}=\dfrac{1}{34}\begin{pmatrix}-11 & 5 & 14\\ 20 & -6 & -10\\ -4 & 8 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\dfrac{11}{34} & \dfrac{5}{34} & \dfrac{14}{34}\\ \dfrac{20}{34} & \dfrac{-6}{34} & -\dfrac{10}{34}\\ -\dfrac{4}{34} & \dfrac{8}{34} & \dfrac{2}{34}\end{pmatrix}.$

Проверка: $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 5\\ 4 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\dfrac{11}{34} & \dfrac{5}{34} & \dfrac{14}{34}\\ \dfrac{20}{34} & -\dfrac{6}{34} & -\dfrac{10}{34}\\ -\dfrac{4}{34} & \dfrac{8}{34} & \dfrac{2}{34}\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot\left(-\frac{11}{34}\right)+3\cdot\frac{20}{34}+1\cdot\left(-\frac{4}{34}\right) & 2\cdot\frac{5}{34}+3\cdot\left(-\frac{6}{34}\right)+1\cdot\frac{8}{34} & 2\cdot\frac{14}{34}+3\cdot\left(-\frac{10}{34}\right)+1\cdot\frac{2}{34}\\ 0\cdot\left(-\frac{11}{34}\right)+1\cdot\frac{20}{34}+5\cdot\left(-\frac{4}{34}\right) & 0\cdot\frac{5}{34}+1\cdot\left(-\frac{6}{34}\right)+5\cdot\frac{8}{34} & 0\cdot\frac{14}{34}+1\cdot\left(-\frac{10}{34}\right)+5\cdot\frac{2}{34}\\ 4\cdot\left(-\frac{11}{34}\right)+2\cdot\frac{20}{34}-1\cdot\left(-\frac{4}{34}\right) & 4\cdot\frac{5}{34}+2\cdot\left(-\frac{6}{34}\right)-1\cdot\frac{8}{34} & 4\cdot\frac{14}{34}+2\cdot\left(-\frac{10}{34}\right)-1\cdot\frac{2}{34}\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Ответ: $A^{-1}=\dfrac{1}{34}\cdot\begin{pmatrix}-11 & 5 & 14\\ 20 & -6 & -10\\ -4 & 8 & 2\end{pmatrix}.$

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Пусть дана система *n* линейных уравнений с *n* неизвестными

$$\begin{cases}a_{11}x_{11}+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_{1n}=b_1;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2;\\ \qquad\qquad\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n.\end{cases} \tag{1}$$

Правило Крамера

Пусть составленный из коэффициентов при неизвестных определитель:

$$A=\begin{vmatrix} a_{11}a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}a_{22}...a_{2n} \\ ... \\ a_{n1}a_{n2}...a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Тогда система (1) имеет единственное решение

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}, x_n=\frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где определитель Δ_k (k=1,2,…*n*) получен из определителя Δ путем замены *k*-го столбца столбцом свободных членов системы (1).

Пример. Решить систему линейных уравнений по правилу Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=1, \\ x_1+2x_2-x_3=2, \\ 3x_1-3x_2+x_3=2. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определители Δ, Δ_1 , Δ_2 , Δ_3.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=2(2-3)+(1+3)+(-3-6)=$$

$$=-2+4-9=-7,$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1. \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=1\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}=(2-3)+(2+2)+(-6-4)=$$

$$=-1+4-10=-7,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=2(2+2)-(1+3)+(2-6)=8-4-4=0,$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}+1\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}=2(4+6)+(2-6)+(-3-6)=20-4-9=7.$$

Тогда $x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-7}{-7}=1;\quad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{0}{7}=0;\quad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{7}{-7}=-1.$

Ответ: x_1=1, x_2=0, x_3= -1.

Метод Гаусса

Пусть дана система уравнений (1).

Предположим, что среди коэффициентов $a_{11}.a_{21},...,a_{n1}$ при неизвестном x_1 имеются коэффициенты, отличные от нуля. Пусть одним из таких коэффициентов является a_{11}. Разделим первое уравнение системы (1) на a_{11}, получим:

$$x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n = \frac{b_1}{a_{11}}. \qquad (2)$$

Это уравнение умножим на ($-a_{21}$) и сложим его со вторым уравнением системы (1), затем уравнение (2) умножим на ($-a_{31}$) и сложим его с третьим уравнением и т.д. С помощью таких операций исключим неизвестное x_1 из всех уравнений системы, начиная со второго. Оставляем неизменным первое уравнение системы (1), а к оставшимся применяем тот же прием, т.е. в n-2 уравнениях исключаем неизвестное x_2 и т.д.

Систему уравнений (1) приведем к треугольному виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}\, x_2 + ... + a'_{2n}\, x_n = b'_2, \\ \qquad\qquad ... \\ \qquad\qquad a'_{nn}\, x_n = b'_n. \end{cases} \qquad (3)$$

Пусть $\Delta = a_{11} \cdot a'_{22} \cdot ... \cdot a'_{nn} \neq 0$. Из последнего уравнения системы (3) найдем x_n. Подставляя затем это значение в предыдущее уравнение, найдем x_{n-1} и т.д. Продолжая эту процедуру, дойдем до первого уравнения, из которого путем подстановки уже найденных значений x_2, x_3, …, x_n получим неизвестное x_1.

Пример. Решить систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = -2. \end{cases} \qquad (4)$$

Решение. Заметим, что во втором уравнении системы коэффициент при x_1 равен 1. Поменяв местами первое и второе уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases} \qquad (5)$$

Умножим первое уравнение системы (5) на (–2) и сложим его со вторым уравнением. Затем умножим первое уравнение на (–3) и сложим его с третьим уравнением. Получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \quad x_3 = 2, \\ \quad -5x_2 + 3x_3 = -3, \\ \quad -9x_2 + 4x_3 = -4. \end{cases} \qquad (6)$$

Разделим второе уравнение системы (6) на (-5), затем полученное уравнение умножим на 9 и сложим с третьим уравнением системы (6). В результате придем к системе (7)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - \quad x_3 = 2, \\ \qquad x_2 - \frac{3}{5}x_3 = \frac{3}{5}, \\ \qquad\quad -\frac{7}{5}x_3 = \frac{7}{5}. \end{cases} \qquad (7)$$

Из третьего уравнения находим x_3=-1. Подставим это значение во второе уравнение системы (7) и найдем x_2:

$$x_2 - \frac{3}{5}(-1) = \frac{3}{5}; \quad x_2 = 0.$$

Подставляя полученные значения x_2 = 0 и x_3 = -1 в первое уравнение системы (7), найдем x_1 :x_1 + 2·0-1·(-1)=2, или x_1 = 1.

Ответ: x_1 = 1, x_2= 0, x_3 = -1.

Решение системы линейных уравнений
с использованием обратной матрицы.

Введем для системы линейных уравнений (1) следующие матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}...a_{12}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{22}...a_{2n} \\ ... \\ a_{n1}...a_{n2}...a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Систему (1) представим в матричной форме$A \cdot X = B$, которая эквивалентна исходной. Действительно, если перемножить матрицыA и X и приравнять элементы матрицы-произведения к соответствующим элементам матрицы B, то получим систему уравнений (1).

Умножим обе части уравнения$A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$ или $(A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B$.

Так как $A^{-1} \cdot A = E$, то $E \cdot X = A^{-1} \cdot B$ или $X = A^{-1} \cdot B$.

Эта формула дает решение системы в матричной форме.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 4, \end{cases}$$ используя обратную матрицу.

Решение. Найдем обратную матрицу к матрице системы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Определитель матрицы А: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} =$

$$= 1(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} - 2(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 1(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 2 \cdot 14 - 4 = 26.$$

Так как определитель матрицыA отличен от 0, то обратная матрица существует. Найдем ее по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, вычислив предварительно алгебраические дополнения. Получим: $A^{-1} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -14 & 3 & 5 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

Найдем матричное решение системы:

$$X = A^{-1} \cdot B = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -14 & 3 & 5 \\ -4 & -1 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ 26 \\ 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $x_1 = 1$; $x_2 = 1$; $x_3 = 1$.

Задания для самоконтроля:

1) *Найти пределы:*

а) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{4x^2 + 4x - 3}{5x^2 + 3x + 4}$

б) $\lim\limits_{x \to 4} \frac{x^2 - x - 12}{2x^2 - 7x - 4}$

в) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{7x}{\sin 3x}$

2) *Найти производные функций:*

а) $y = x \ln 2x - x$

б) $y = \ln(2 \sin 3x)$

в) $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$

3) *Исследовать с помощью производной функцию:*

$y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

4) *Найти:*

а) $\int \left(\frac{2x - 1}{x} \right)^2 dx$

б) $\int \cos x \sqrt{\sin x}\, dx$

в) $\int\limits_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$

Векторы

1. Найти $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{a}(1,2)$ и $\boldsymbol{b}(3,4)$

Варианты ответов:	(7;10)	(-2;-2)	(4;6)	(-5;-6)

2. При каком значении *m* векторы $\boldsymbol{a}(1,2)$ и $\boldsymbol{b}(3,m)$ будут коллинеарными?

Варианты ответов:	4	6	0	3

3. При каком значении *m* векторы $\boldsymbol{a}(1,2)$ и $\boldsymbol{b}(3,m)$ будут ортогональными?

Варианты ответов:	0	1,5	6	-1,5

4. При каком значении *m* векторы $\boldsymbol{a}(1,2)$ и $\boldsymbol{b}(3,m)$ будут линейно зависимыми?

Варианты ответов:	1,5	-1,5	0	6

5. Разложение вектора $\vec{c}$ ={7,-4} по базису ***a*** ={3,-2} и ***b*** ={-2,1} имеет вид:

Варианты ответов:	$2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a} - 3\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$	$3\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$

Матрицы

1. Выберите правильное утверждение:

Варианты ответов:	Матрица может иметь любое число строк и столбцов	Матрица всегда имеет одинаковое число строк и столбцов	Матрица не может состоять из одной строки	Матрица не может состоять из одного столбца

2. Транспонирование матриц – это:

Варианты ответов:	Перестановка местами двух столбцо	Изменение знака у всех элемен	Перестановка местами двух строк	Перестановка местами строк и столбцов

в	тов		

3. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&5&2\\-2&0&-1\\3&2&-2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&-3&-2\\-1&1&1\\4&3&2\end{pmatrix}$ Найти

$2A-3B$:

Варианты ответов:	$\begin{pmatrix}-4&19&10\\-1&-3&-5\\-6&-5&-10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4&19&-10\\-1&-3&-5\\-6&-5&-10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4&19&10\\-1&3&-5\\-6&-5&-10\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-4&19&10\\-1&-3&-5\\6&-5&-10\end{pmatrix}$

4. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}1&5&2\\-2&0&-1\\3&2&-2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&-3&-2\\-1&1&1\\4&3&2\end{pmatrix}$

Найти $A\cdot B$:

Варианты ответов:	$\begin{pmatrix}5&8&7\\8&3&2\\4&-13&-8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&-8&7\\-8&3&2\\-4&-13&-8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&8&7\\-8&3&2\\-4&-13&-8\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}5&8&-7\\-8&3&-2\\-4&-13&-8\end{pmatrix}$

5. Определителем матрицы $A=\begin{pmatrix}1&5&2\\-2&0&-1\\3&2&-2\end{pmatrix}$ будет

число:

Варианты ответов:	41	0	36	-4

6. При каком значении α матрица $\begin{pmatrix}\alpha&-1\\2&3\end{pmatrix}$ будет

вырожденной:

Варианты ответов:	2/3	-2/3	3	0

7. Обратной матрицей B^{-1}для $B=\begin{pmatrix}2&-3&-2\\-1&1&1\\4&3&2\end{pmatrix}$ является

матрица:

Варианты ответов:	$\begin{pmatrix}1/6&0&1/6\\-1&2&0\\7/6&3&1/6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/6&0&1/6\\1&-2&0\\7/6&3&1/6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/6&0&-1/6\\-1&-2&0\\7/6&3&1/6\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}1/6&0&1/6\\-1&-2&0\\7/6&3&1/6\end{pmatrix}$

Системы линейных уравнений

1. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases}-x_1+2x_2-x_3=0\\x_1+3x_2-3x_3=1\\2x_1-x_2-x_3=0\end{cases}$$

Варианты ответов:	(1,1,1)	(2,1,1)	(1,2,1)	(3,2,2)

2. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 = -2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = -1 \end{cases}$$

Вариа ты ответов:	(-1,-1,2)	(1,-1,2)	(1,-1,0)	(1,1,2)

3. Решить методом обратной матрицы

$$\begin{cases} 3x - y = 8 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

Варианты ответов:	$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1/4 & 1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1/4 & -1/4 \\ -1/4 & 3/4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Множества

1) Составить список элементов множеств, заданных посредством характеристического признака:

$X=\{x|x\in \mathrm{N}, -4<x\leq 3\}$.

2) Описать множества точек *M* плоскости таких, что:

$\{M|OM=5\}$;

3) Равны ли множества {{1, 2}, 3} и {1, 2, 3}?

4) Верно ли, что $\{1, 2\}\in\{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$?

5) Для каждых двух из следующих множеств указать, является ли одно из них подмножеством другого: *A*={1}, *B*={1, 2}, *C*={1, 2, 3}, *D*={{1}, 2, 3}, *E*={3, 2, 1}, *F*={{1, 2}, 3}.

6. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность множеств*A* и *B*, если

A={а, в, д, ж, и, м, н, о}, *B*={в, к, и, о, м, п, с, ф};

7. Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность множеств*A* и *B*, если

$A=\{a \mid a\in(-7; 1]\}$, $B=\{b \mid b\in[-3,4]\}$;

19. Даны следующие числовые множества: A={1,3,5,7,9,11}, B={2,5,6,11,12}, C={1,2,3,5,9,12}. Найти множества, которые будут получены в результате выполнения следующих операций:

а) (*A*□*C*)\(*B*∆*A*)*C*; б) (*C*□*B*∆*A*)\(*C*□*A*); в) (*A**C*)□(*B*∆*C*);

г) (*C**B*)□(*A**C*); д) (*B*∆*C*)□(*A**B*)□□ (*C**A*); е) (*A*□*C*) ∆ (*B*□*A*)*C.*

Основы теории вероятностей

1. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что на верхней грани выпадет ***не менее трех*** очков равна …

Варианты ответов:

2/3	1/2	1/3	1/6

2. Вероятность продажи товара***A*** в течении дня равна 0,4; товара ***B***в течении дня 0,2. Какая вероятность, что в течении дня будет продан товар***A***, а товар ***B*** не продан:

Варианты ответов:

0,08	0,32	0,12	0,6

3. В первой урне 3 белых и 7 черных шаров. Во второй урне 5 белых и 15 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар. Тогда вероятность того, что этот шар окажется белым, равна…

Варианты ответов:

0,275	0,267	0,725	0,733

Основы математической статистики

1. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n=50:

X_i	1	2	3	4
P_i	20	8	12	n_4

Тогда n_4 равен…

Варианты ответов:

8	40	10	50

2.Проведено 5 измерений некоторой величины. Выборка значений есть: 17, 11, 13, 15, 14. Тогда выборочная оценка математического ожидания равна…

Варианты

13	14	15	17

ответов:				

3. В результате измерения некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 1, 4, 4. Тогда несмещенная оценка дисперсии измерений равна …

Варианты ответов:	2	12	3	6

Литература

1. Математика : учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : ИНФРА-М, 2017. — 544 с. — (Среднее профессиональное образование). http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=774755
2. Математика. Элементы высшей математики: учебник: в 2 т. Т. 1 / В.В. Бардушкин, А.А. Прокофьев. — М.: КУРС: ИНФРА-М, 2017. — 304 с. — (Среднее профессиональное образование). http://znanium.com/catalog.php?bookinfo=615108
3. Математика ЕН.01: методические указания для обучающихся к практическим занятиям и самостоятельной работе для специальности 38.02.01 Экономика и бухгалтерский учет (по отраслям) / Сост. Ю.В. Киреев. - Воронеж: АОНО ВО «ИММиФ», 2015. - 32 с.