АВТОНОМНАЯ НЕКОММЕРЧЕСКАЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ

«Колледж информационных технологий и финансов»

(АН ПОО «Колледж информационных технологий и финансов»)

УТВЕРЖДАЮ:
Директор
_____________ Е.Н.Григорьева

«13» апреля 2018 г.

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН.03 Теория вероятностей и математическая статистика
(индекс и наименование учебной дисциплины/междисциплинарного курса)

09.02.04 Информационные системы (по отраслям)
(код и наименование специальности)

Квалификация выпускника техник по информационным системам
(наименование квалификации)

Уровень базового образования обучающихся – основное общее образование

Воронеж
2018

Методические указания для самостоятельной работы являются частью основной профессиональной образовательной программы среднего профессионального образования по программе подготовки специалистов среднего звена по специальности 09.02.04 Информационные системы (по отраслям).

Разработчики:

ст. преподаватель ______ Ю.В. Киреев

(занимаемая должность) (подпись) (инициалы, фамилия)

______ ______ ______

(занимаемая должность) (подпись) (инициалы, фамилия)

Методические указания для самостоятельной работы рассмотрены на заседании цикловой комиссии по общим предметам и дисциплинам– протокол от ____________ № ___.

Председатель
цикловой комиссии ______ Ю.В.Киреев
(подпись)

Элементы комбинаторики

Решение типовых примеров

Событием (или случайным событием) называется всякий факт, который может произойти или не произойти.

При классическом определении вероятность события определяется равенством:

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m — число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события А; n — общее число возможных элементарных исходов испытания.

Число возможных перестановок n элементов равно:

$$P_n = 1\cdots(n-1)n = n!$$

Число сочетаний из n элементов по m элементов:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!};\ C_n^0 = 1.$$

Число размещений из n элементов по m элементов:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример 1. Найти вероятность того, что при бросании игральной кости выпадет число очков, делящееся на 2 (событие A).

Решение. Число элементарных событий здесь 6. Число благоприятствующих событий 3 (выпадение 2, 4 или 6). Поэтому

$$P(A)=3/6=1/2.$$

Пример 2. В партии из 20 деталей имеется 15 стандартных. Наудачу выбраны 5 деталей. Найти вероятность того, что среди выбранных деталей ровно 4 стандартных.

Решение. Всего возможно C_{20}^5 выборок 5 деталей из 20 возможных (это общее число возможных элементарных исходов испытания). Интересующее нас событие заключается в том, что данная выборка содержит 4 стандартные детали и 1 нестандартную. Подсчитаем число благоприятствующих этому событию вариантов: 4 стандартных детали можно взять из 15 имеющихся C_{15}^{4} способами; при этом оставшаяся 5 – 4 = 1 деталь должна быть нестандартной. Число способов ее выбора из 20 – 15 = 5 имеющихся равно C_5^1. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно $C_{15}^4 C_5^1$.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов:

$$P(A)=\frac{C_{15}^4 C_5^1}{C_{20}^5}=\frac{15!}{4!\cdot 11!}\frac{5!}{4!\cdot 1!}\frac{15!\cdot 5!}{20!}=\frac{12\cdot 13\cdot 14\cdot 15}{2\cdot 3\cdot 4}\cdot 5\cdot\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{16\cdot 17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}=\frac{13\cdot 14\cdot 15\cdot 5}{16\cdot 17\cdot 6\cdot 19}=0{,}44$$

Основные понятия.

Событием называется всякий факт, который может произойти или не произойти в результате опыта. При этом тот или иной результат опыта может быть получен с различной степенью возможности. Т.е. в некоторых случаях можно сказать, что одно событие произойдет практически наверняка, другое практически никогда. В отношении друг друга события также имеют особенности, т.е. в одном случае событие А может произойти совместно с событием В, в другом – нет.

События называются несовместными, если появление одного из них исключает появление других.

Примером несовместных событий является результат подбрасывания монеты – выпадение лицевой стороны монеты исключает выпадение обратной стороны (в одном и том же опыте).

Полной группой событий называется совокупность всех возможных результатов опыта.

Достоверным событием называется событие, которое наверняка произойдет в результате опыта. Событие называется невозможным, если оно никогда не произойдет в результате опыта.

Например, если из коробки, содержащей только красные и зеленые шары, наугад вынимают один шар, то появление среди вынутых шаров белого – невозможное событие. Появление красного и появление зеленого шаров образуют полную группу событий.

События называются равновозможными, если нет оснований считать, что одно из них появится в результате опыта с большей вероятностью.

В приведенном выше примере появление красного и зеленого шаров – равновозможные события, если в коробке находится одинаковое количество красных и зеленых шаров.

Если же в коробке красных шаров больше, чем зеленых, то появление зеленого шара – событие менее вероятное, чем появление красного.

Элементарными исходами опыта называются такие результаты опыта, которые взаимно исключают друг друга и в результате опыта происходит одно из этих событий, также каково бы ни было событие А, по наступившему элементарному исходу можно судить о том, происходит или не происходит это событие. Совокупность всех элементарных исходов опыта называется пространством элементарных событий.

Вероятностью события А называется математическая оценка возможности появления этого события в результате опыта. Вероятность события А равна отношению числа, благоприятствующих событию А исходов опыта к общему числу попарно несовместных исходов опыта, образующих полную группу событий.

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

Исход опыта является благоприятствующим событию А, если появление в результате опыта этого исхода влечет за собой появление события А.

Вероятность достоверного события равна единице, а вероятность невозможного – равна нулю. Таким образом, значение вероятности любого события – есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

$$0 \le P(A) \le 1$$

Пример. В коробке находится 10 шаров. 3 из них красные, 2 – зеленые, остальные белые. Найти вероятность того, что вынутый наугад шар будет красным, зеленым или белым.

Появление красного, зеленого и белого шаров составляют полную группу событий. Обозначим появление красного шара – событие А, появление зеленого – событие В, появление белого – событие С. Тогда в соответствием с записанными выше формулами получаем: $P(A) = \frac{3}{10}; \quad P(B) = \frac{2}{10}; \quad P(C) = \frac{5}{10};$

Относительной частотой события А называется отношение числа опытов, в результате которых произошло событие А к общему числу опытов.

Отличие относительной частоты от вероятности заключается в том, что вероятность вычисляется без непосредственного произведения опытов, а относительная частота – после опыта.

В примере, если из коробки наугад извлечено 5 шаров и 2 из них оказались красными, то относительная частота появления красного шара равна:

$$W(A) = \frac{2}{5}$$

Как видно, эта величина не совпадает с найденной вероятностью.

При достаточно большом числе произведенных опытов относительная частота изменяется мало, колеблясь около одного числа. Это число может быть принято за вероятность события.

Классическое определение вероятности неприменимо к испытаниям с бесконечным числом исходов. Чтобы преодолеть этот недостаток вводится понятие геометрической вероятности, т.е. вероятности попадания точки в какой – либо отрезок или часть плоскости (пространства). Например, если на отрезке длиной L выделен отрезок длины l, то вероятность попадания наугад взятой точки в отрезок l равна отношению l/L.

Сложные события. Операции над событиями.

События А и В называются равными, если осуществление события А влечет за собой осуществление события В и наоборот.

Объединением или суммой событий А и В называется событие С, которое означает появление хотя бы одного из событий А или В.

Пересечением или произведением событий А и В называется событие С, которое заключается в осуществлении всех событий А и В.

Разностью событий А и В называется событие С, которое означает, что происходит событие А, но не происходит событие В.

Дополнительным к событию А называется событие $\overline{A}$, означающее, что событие А не происходит.

Сложения вероятностей

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ образуют полную группу несовместных событий, то сумма их вероятностей равна единице.

$$\sum_{i=1}^{n} P(A_i)=1$$

Противоположными называются два несовместных события, образующие полную группу.

Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице.

$$P(A)+P(\overline{A})=1$$

Событие А называется независимым от события В, вероятность события А не зависит от того, произошло событие В или нет. Событие А называется зависимым от события В, если вероятность события А меняется в зависимости от того, произошло событие В или нет.

Вероятность события В, вычисленная при условии, что имело место событие А, называется условной вероятностью события В.

$$P_A(B)=P(B/A)=P(AB)/P(A)$$

Умножения вероятностей

Вероятность произведения двух событий (совместного появления этих событий) равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже наступило.

$$P(AB)=P(A)P(B/A)=P(A)P_A(B)$$

Также можно записать: $P(AB)=P(A)P(B/A)=P(B)P(A/B)=P(B)P_B(A)$

Если события независимые, то $P(B/A)=P(B)$, и теорема умножения вероятностей принимает вид:

$$P(AB)=P(A)P(B)$$

Пример . Два стрелка производят по одному выстрелу в цель не зависимо друг от друга. Вероятности попадания в цель для каждого из них равны соответственно 0,7; 0,8. Найти вероятность того, что: а) в цель попадет только один стрелок; б) в цель попадут оба стрелка; в) в цель попадет хотя бы один стрелок.

а) рассмотрим следующие события: A_1 = {первый стрелок попал в цель}; A_2 = {второй стрелок попал в цель); $\overline{A_1}$ = {первый стрелок не попал в цель}; $\overline{A_2}$ ={второй стрелок не попал в цель}.

По условию, $P(A_1)$ = 0,7; $P(A_2)$ = 0,8; $P(\overline{A_1})$ = 1 – 0,7 = 0,3; $P(\overline{A_2})$ = 1 – 0,8 = 0,2.

Пусть событие B = {попал только один стрелок}. Тогда

$$B=A_1\overline{A_2}+A_2\overline{A_1}$$

Отсюда, в силу несовместности событий-слагаемых и независимости событий-сомножителей, имеем

$$P(B)=P(A_1)P(\overline{A_2})+P(A_2)P(\overline{A_1})=0,7\cdot 0,2+0,3\cdot 0,8=0,38.$$

б) Пусть событие C = {попадут оба стрелка}. Тогда $C=A_1\cdot A_2$, откуда $P(C)$ = 0,7 · 0,8 = 0,56.

в) Пусть событие D = {попал хотя бы один стрелок}. Тогда противоположное событие $\overline{D}$= {не попал ни один из них}, т.е. $\overline{D}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}$. Поэтому $P(\overline{D})$ = 0,3·0,2 = 0,06. Отсюда

$$P(D)=1-P(\overline{D})=1-0,06=0,94.$$

Пример. Для проведения зачета преподаватель заготовил 50 задач: 20 по дифференциальному исчислению, 30 по интегральному исчислению. Чтобы получить зачет, студент должен решить первую доставшуюся наугад задачу.

Какова вероятность сдать зачет для студента, умеющего решать 18 задач по дифференциальному исчислению и 15 задач по интегральному?

Пусть событие A сводится к тому, что студент сдал зачет (то есть, знает как решать задачу). Выдвигаем две гипотезы:

1) B_1 = {студенту досталась задача по дифференциальному исчислению};

2) B_2 = {студенту досталась задача по интегральному исчислению};

Вероятность гипотезы B_1 равна $P(B_1) = 20/50 = 0,4$, а вероятность гипотезы B_2 равна $P(B_2) = 30/50 = 0,6$. Согласно условию задачи, в случае B_1 студент сдаст зачет с вероятностью $P_{B_1}(A) = 18/20 = 0,9,$ а в случае B_2 — с вероятностью $P_{B_2}(A) = 15/30 = 0,5.$ По формуле полной вероятности имеем:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) = 0,4 \cdot 0,9 + 0,6 \cdot 0,5 = 0,66.$$

Пример. Имеются две партии однородных деталей. Первая партия состоит из 12 деталей, 3 из которых - бракованные. Вторая партия состоит из 15 деталей, 4 из которых – бракованные. Из первой и второй партий извлекают по две детали. Какова вероятность того, что среди них нет бракованных деталей.

Вероятность оказаться не бракованной для первой детали, извлеченной из первой партии, равна $p_1 = \frac{9}{12}$, для второй детали, извлеченной из первой партии при условии, что первая деталь была не бракованной - $p_2 = \frac{8}{11}$.

Вероятность оказаться не бракованной для первой детали, извлеченной из второй партии, равна $p_3 = \frac{11}{15}$, для второй детали, извлеченной из второй партии при условии, что первая деталь была не бракованной - $p_4 = \frac{10}{14}$.

Вероятность того, что среди четырех извлеченных деталей нет бракованных, равна:

$$P = \frac{9 \cdot 8 \cdot 11 \cdot 10}{12 \cdot 11 \cdot 15 \cdot 14} = 0,2857$$

Из теоремы произведения вероятностей можно сделать вывод о вероятности появления хотя бы одного события. Если в результате испытания может появиться n событий, независимых в совокупности, то вероятность появления хотя бы одного из них равна

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 ... q_n$$

Здесь событие А обозначает наступление хотя бы одного из событий A_i, а q_i – вероятность противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$.

Пример. Из полной колоды карт (52 шт.) одновременно вынимают четыре карты. Найти вероятность того, что среди этих четырех карт будет хотя бы одна бубновая или одна червонная карта.

Обозначим появление хотя бы одной бубновой карты – событие А, появление хотя бы одной червонной карты – событие В. Таким образом нам надо определить вероятность события С = А + В.

Кроме того, события А и В – совместны, т.е. появление одного из них не исключает появления другого.

Всего в колоде 13 червонных и 13 бубновых карт.

При вытаскивании первой карты вероятность того, что не появится ни червонной ни бубновой карты равна $\frac{26}{52}$, при вытаскивании второй карты - $\frac{25}{51}$, третьей - $\frac{24}{50}$, четвертой - $\frac{23}{49}$.

Тогда вероятность того, что среди вынутых карт не будет ни бубновых, ни червонных равна $P(\overline{C}) = \frac{26}{52} \cdot \frac{25}{51} \cdot \frac{24}{50} \cdot \frac{23}{49}$.

Тогда $P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}945$

Пример. Чему равна вероятность того, что при бросании трех игральных костей 6 очков появится хотя бы на одной из костей?

Вероятность выпадения 6 очков при одном броске кости равна $\frac{1}{6}$.

Вероятность того, что не выпадет 6 очков - $\frac{5}{6}$. Вероятность того, что при броске трех костей не выпадет ни разу 6 очков равна $p = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$.

Тогда вероятность того, что хотя бы один раз выпадет 6 очков равна $1-\frac{125}{216}=\frac{91}{216}$.

Пример. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

Обозначим попадание в цель первым стрелком – событие А, вторым – событие В, промах первого стрелка – событие $\overline{A}$, промах второго – событие $\overline{B}$.

$$P(A)=0{,}7; \quad P(\overline{A})=0{,}3; \quad P(B)=0{,}8; \quad P(\overline{B})=0{,}2.$$

Вероятность того, что первый стрелок попадет в мишень, а второй – нет равна

$$P(A)P(\overline{B})=0{,}7\cdot 0{,}2=0{,}14$$

Вероятность того, что второй стрелок попадет в цель, а первый – нет равна

$$P(\overline{A})P(B)=0{,}3\cdot 0{,}8=0{,}24$$

Тогда вероятность попадания в цель только одним стрелком равна

$$P=0{,}14+0{,}24=0{,}38$$

Тот же результат можно получить другим способом – находим вероятности того, что оба стрелка попали в цель и оба промахнулись. Эти вероятности соответственно равны:

$$P(A)P(B)=0{,}7\cdot 0{,}8=0{,}56; \quad P(\overline{A})P(\overline{B})=0{,}3\cdot 0{,}2=0{,}06.$$

Тогда вероятность того, что в цель попадет только один стрелок равна:

$$P=1-0{,}56-0{,}06=0{,}38.$$

Пример. Вероятность того, что взятая наугад деталь из некоторой партии деталей, будет бракованной равна 0,2. Найти вероятность того, что из трех взятых деталей 2 окажется не бракованными.

Обозначим бракованную деталь – событие А, не бракованную – событие $\overline{A}$.

$P(A) = 0{,}2; \quad P(\overline{A}) = 0{,}8;$

Если среди трех деталей оказывается только одна бракованная, то это возможно в одном из трех случаев: бракованная деталь будет первой, второй или третьей.

$$P = P(A)P(\overline{A})P(\overline{A}) + P(\overline{A})P(A)P(\overline{A}) + P(\overline{A})P(\overline{A})P(A)$$

$$P = 3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}8 = 0{,}384$$

Пример. Вероятности того, что нужная деталь находится в первом, втором, третьем или четвертом ящике, соответственно равны 0,6, 0,7, 0,8, 0,9. Найти вероятности того, что эта деталь находится: а) не более, чем в трех ящиках; б) не менее, чем в двух ящиках.

а) Вероятность того, что данная деталь находится во всех четырех ящиках, равна

$$P = P_1P_2P_3P_4 = 0{,}6 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}3024.$$

Вероятность того, что нужная деталь находиться не более, чем в трех ящиках равна вероятности того, что она не находится во всех четырех ящиках.

$$P(A) = 1 - P = 1 - 0{,}3024 = 0{,}6976.$$

б) Вероятность того, что нужная деталь находится не менее, чем в двух ящиках, складывается из вероятностей того, что деталь находиться только в двух ящиках, только в трех ящиках, только в четырех ящиках. Конечно, эти вероятности можно посчитать, а потом сложить, однако, проще поступить иначе. Та же вероятность равна вероятности того, что деталь не находится только в одном ящике и имеется вообще.

Вероятность того, что деталь находится только в одном ящике, равна

$$P = P_1q_2q_3q_4 + q_1P_2q_3q_4 + q_1q_2P_3q_4 + q_1q_2q_3P_4$$

$$P = 0{,}6 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}1 + 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}9 =$$

$$= 0{,}0036 + 0{,}0056 + 0{,}0096 + 0{,}0216 = 0{,}0404$$

$$Q = 1 - 0{,}0404 = 0{,}9596$$

Вероятность того, что нужной деталь нет ни в одном ящике, равна:

$P_0 = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0{,}4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}1 = 0{,}0024$

$Q_0 = 1 - 0{,}0024 = 0{,}9976$

Искомая вероятность равна $P(B) = Q \cdot Q_0 = 0{,}9596 \cdot 0{,}9976 = 0{,}9573.$

Пример. Последовательно послано четыре радиосигнала. Вероятности приема каждого из них не зависят от того, приняты ли остальные сигналы, или нет. Вероятности приема сигналов равны соответственно 0,2, 0,3, 0,4, 0,5. Определить вероятность приема трех радиосигналов.

Событие приема трех сигналов из четырех возможно в четырех случаях:

$P_A = p_1 p_2 p_3 q_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}012$

$P_B = p_1 p_2 q_3 p_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}018$

$P_C = p_1 q_2 p_3 p_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}028$

$P_D = q_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}8 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}048$

Для приема трех сигналов необходимо совершение одного из событий A, B, C или D. Таким образом, находим искомую вероятность:

$P = 0{,}012 + 0{,}018 + 0{,}028 + 0{,}048 = 0{,}106.$

Формула полной вероятности.

Пусть некоторое событие А может произойти вместе с одним из несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, составляющих полную группу событий. Пусть известны вероятности этих событий $P(H_1), P(H_2), ..., P(H_n)$ и условные вероятности наступления события А при наступлении события H_i $P(A/H_1), P(A/H_2), ..., P(A/H_n)$.

Вероятность события А, которое может произойти вместе с одним из событий $H_1, H_2, ..., H_n$, равна сумме парных произведений вероятностей каждого из этих событий на соответствующие им условные вероятности наступления события А.

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A/H_i)$$

Пример. Один из трех стрелков производит два выстрела. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что в цель попадут два раза.

Вероятность того, что выстрелы производит первый, второй или третий стрелок равна $\frac{1}{3}$.

Вероятности того, что один из стрелков, производящих выстрелы, два раза попадает в цель, равны:

- для первого стрелка: $p_1^2 = 0{,}4^2 = 0{,}16;$

- для второго стрелка: $p_2^2 = 0{,}6^2 = 0{,}36;$

- для третьего стрелка: $p_3^2 = 0{,}8^2 = 0{,}64;$

Искомая вероятность равна:

$$p = \frac{1}{3}p_1^2 + \frac{1}{3}p_2^2 + \frac{1}{3}p_3^3 = \frac{1}{3}(0{,}16 + 0{,}36 + 0{,}64) = \frac{29}{75}$$

Пример. В первой коробке содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй коробке 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой коробки наугад извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наугад берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Вероятность того, что взятый из первой коробки шар белый - $P_1(Б) = 0{,}8,$ что не белый - $P_1(НБ) = 0{,}2$.

Вероятность того, что взятый из второй коробки шар белый - $P_2(Б) = 0{,}2,$ что не белый - $P_2(НБ) = 0{,}8.$

Вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из первой коробки и вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из второй коробки, равны 0,5.

Вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из первой коробки, и он белый - $p_1 = 0{,}5 \cdot P_1(Б) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4.$

Вероятность того, что повторно выбран шар, извлеченный из второй коробки, и он белый - $p_2 = 0{,}5 \cdot P_2(Б) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}1.$

Вероятность того, что повторно будет выбран белый шар, равна

$$P = p_1 + p_2 = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5.$$

Пример. Имеется пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит цель при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95, для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что цель будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наугад выбранной винтовки.

Вероятность того, что выбрана винтовка с оптическим прицелом, обозначим $P_0 = \frac{3}{5}$, а вероятность того, что выбрана винтовка без оптического прицела, обозначим $P_{БО} = \frac{2}{5}$.

Вероятность того, что выбрали винтовку с оптическим прицелом, и при этом цель была поражена $P_1 = P_0 \cdot P(ПЦ / О)$, где $P(ПЦ/О)$ – вероятность поражения цели из винтовки с оптическим прицелом.

Аналогично, вероятность того, что выбрали винтовку без оптического прицела, и при этом цель была поражена $P_1 = P_{БО} \cdot P(ПЦ / БО)$, где $P(ПЦ/БО)$ – вероятность поражения цели из винтовки без оптического прицела.

Окончательная вероятность поражения цели равна сумме вероятностей P_1 и P_2, т.к. для поражения цели достаточно, чтобы произошло одно из этих несовместных событий.

$$P = P_1 + P_2 = 0{,}95 \cdot 0{,}6 + 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}57 + 0{,}28 = 0{,}85$$

Формула Бейеса. (формула гипотез)

Вероятность гипотезы после испытания равна произведению вероятности гипотезы до испытания на соответствующую ей условную вероятность события, которое произошло при испытании, деленному на полную вероятность этого события.

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i)P(A / H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A / H_i)}$$

Эта формула называется формулой Бейеса.

<u>Пример.</u> Трое охотников одновременно выстрелили по медведю, который был убит одной пулей. Определить вероятность того, что медведь был убит первым стрелком, если вероятности попадания для этих стрелков равны соответственно 0,3, 0,4, 0,5.

В этой задаче требуется определить вероятность гипотезы уже после того, как событие уже совершилось. Для определения искомой вероятности надо воспользоваться формулой Бейеса. В нашем случае она имеет вид:

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) + P(H_3)P(A / H_3)}$$

В этой формуле *H_1, H_2, H_3* – гипотезы, что медведя убьет первый, второй и третий стрелок соответственно. До произведения выстрелов эти гипотезы равновероятны и их вероятность равна $\frac{1}{3}$. *$P(H_1/A)$* – вероятность того, что медведя убил первый стрелок при условии, что выстрелы уже произведены (событие А).

Вероятности того, что медведя убьет первый, второй или третий стрелок, вычисленные до выстрелов, равны соответственно:

$$P(A / H_1) = p_1 q_2 q_3 = 0{,}3 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}09$$

$$P(A / H_2) = q_1 p_2 q_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 = 0{,}14$$

$$P(A / H_3) = q_1 q_2 p_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}5 = 0{,}21$$

Здесь $q_1 = 0{,}7$; $q_2 = 0{,}6$; $q_3 = 0{,}5$ – вероятности промаха для каждого из стрелков, рассчитаны как $q = 1 - p$, где p – вероятности попадания для каждого из стрелков.

Подставим эти значения в формулу Бейеса:

$$P(H_1 / A) = \frac{0{,}09}{0{,}44} = \frac{9}{44}.$$

Повторение испытаний. Формула Бернулли.

Если производится некоторое количество испытаний, в результате которых может произойти или не произойти событие А, и вероятность появления этого события в каждом из испытаний не зависит от результатов остальных испытаний, то такие испытания называются независимыми относительно события А.

Допустим, что событие А наступает в каждом испытании с вероятностью *P(A)=p*. Определим вероятность *P* того, что в результате *n* испытаний событие А наступило ровно *m* раз.

Формула Бернулли**:** $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$

Формула Бернулли важна тем, что справедлива для любого количества независимых испытаний, т.е. того самого случая, в котором наиболее четко проявляются законы теории вероятностей.

<u>Пример.</u> По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятность того, что в цель попали не менее трех раз.

Вероятность не менее трех попаданий складывается из вероятности пяти попаданий, четырех попаданий и трех попаданий. Т.к. выстрелы независимы, то можно применить формулу Бернулли вероятности того, что в *m* испытаниях событие в вероятностью *p* наступает ровно *n* раз.

$$P_{m,n} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

В случае пяти попаданий из пяти возможных:

$$P_{5,5} = p^5 = 0{,}4^5 = 0{,}01024$$

Четыре попадания из пяти выстрелов:

$$P_{4,5} = \frac{5!}{4! \cdot 1!} p^4 (1-p) = 0{,}0768$$

Три попадания из пяти:

$$P_{3,5} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} p^3 (1-p)^2 = 0{,}2304$$

Окончательно, получаем вероятность не менее трех попаданий из пяти выстрелов:

$$P = 0{,}01204 + 0{,}0768 + 0{,}2304 = 0{,}31744$$

Пример Найти вероятность того, что при 10-кратном бросании монеты герб выпадет ровно 5 раз.

Вероятность выпадения герба при одиночном испытании $p = 1/2$, отсюда $q = 1 - p = 1/2$. По формуле Бернулли имеем

$$P_{10}(5) = C_{10}^{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = 0{,}25 \quad .$$

Пример Вероятность поражения цели стрелком при одиночном выстреле равна $p = 0{,}2$. Какова вероятность, что при 100 выстрелах цель будет поражена ровно 20 раз?

Вычислить искомую вероятность по формуле Бернулли затруднительно. Применим приближенную формулу для вероятности $P_n(k)$ появления события A точно n раз, если n — достаточно большое число:

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{и} \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}$$

В нашем случае $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$, $n = 100$ и $m = 20$. Отсюда $\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8} = 4$ и, следовательно,

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{20 - 100 \cdot 0.2}{4} = 0 \quad .$$

Учитывая, что $\varphi(0) \approx 0{,}4$, получаем ответ: $p_{100}(20) \approx 0{,}10$.

Если вероятность наступления события A в каждом из n независимых испытаний постоянна и равна p, то вероятность $p_n(k_1 < x < k_2)$ того, что событие A в таких испытаниях наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз определяется по интегральной теореме Лапласа следующей формулой:

$$p_n(k_1 \prec x \prec k_2) \approx \varphi(b) - \varphi(a), \quad \text{где} \quad a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$$

Пример Вероятность поражения цели стрелком при одиночном выстреле равна p = 0,2. Какова вероятность того, что при 100 выстрелах цель будет поражена не менее 20 раз?

Решение. Здесь n = 100, $k_1 = 20$, $k_2 = 100$, $a = \frac{20 - 100 \cdot 0.2}{4} = 0$, $b = \frac{100 - 100 \cdot 0,2}{4} = 20$. Подставляя эти значения в интегральную теорему Лапласа, получаем:

$p_{100}(20 < x < 100) \approx \phi(20) - \phi(0) = 0,500 - 0 = 0,500$.

Случайные величины.

Выше рассматривались случайные события, являющиеся качественной характеристикой случайного результата опыта. Для получения количественной характеристики вводится понятие случайной величины.

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причем заранее известно какое именно.

Случайные величины можно разделить на две категории.

Дискретной случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принимать определенные значения с определенной вероятностью, образующие счетное множество (множество, элементы которого могут быть занумерованы).

Это множество может быть как конечным, так и бесконечным. Например, количество выстрелов до первого попадания в цель является дискретной случайной величиной, т.к. эта величина может принимать и бесконечное, хотя и счетное количество значений.

Непрерывной случайной величиной называется такая величина, которая может принимать любые значения из некоторого конечного или бесконечного промежутка.

Очевидно, что число возможных значений непрерывной случайной величины бесконечно.

Для задания случайной величины недостаточно просто указать ее значение, необходимо также указать вероятность этого значения.

Закон распределения дискретной случайной величины.

Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется законом распределения дискретной случайной величины.

Закон распределения может быть задан аналитически, в виде таблицы или графически.

Таблица соответствия значений случайной величины и их вероятностей называется рядом распределения.

Графическое представление этой таблицы называется . При этом сумма все ординат многоугольника распределения представляет собой вероятность всех возможных значений случайной величины, а, следовательно, равна единице. При построении многоугольника распределения надо помнить, что соединение полученных точек носит условный характер. В промежутках между значениями случайной величины вероятность не принимает никакого значения. Точки соединены только для наглядности.

Пример. По цели производится 5 выстрелов. Вероятность попадания для каждого выстрела равна 0,4. Найти вероятности числа попаданий и построить многоугольник распределения.

Вероятности пяти попаданий из пяти возможных, четырех из пяти и трех из пяти были найдены по формуле Бернулли и равны соответственно:

$P_{5,5} = 0{,}01024$, $P_{4,5} = 0{,}0768$, $P_{3,5} = 0{,}2304$

Аналогично найдем:

$$P_{2,5} = \frac{5!}{2!\cdot 3!}0{,}4^2 \cdot 0{,}6^3 = 0{,}3456 \quad P_{1,5} = \frac{5!}{1!\cdot 4!}0{,}4^1 \cdot 0{,}6^4 = 0{,}2592$$

$$P_{0,5} = \frac{5!}{0!\cdot 5!}0{,}4^0 \cdot 0{,}6^5 = 0{,}6^5 = 0{,}0778$$

Биноминальное распределение.

Если производится n независимых испытаний, в каждом из которых событие А может появиться с одинаковой вероятностью p в каждом из испытаний, то вероятность того, что событие не появится, равна $q = 1 - p$.

Примем число появлений события в каждом из испытаний за некоторую случайную величину X.

Чтобы найти закон распределения этой случайной величины, необходимо определить значения этой величины и их вероятности.

Значения найти достаточно просто. Очевидно, что в результате n испытаний событие может не появиться вовсе, появиться один раз, два раза, три и т.д. до n раз.

Вероятность каждого значения этой случайной величины можно найти по формуле Бернулли.

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad k = 0,1,2,...$$

Эта формула аналитически выражает искомый закон распределения. Этот закон распределения называется биноминальным.

Пример. В партии 10% нестандартных деталей. Наугад отобраны 4 детали. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырех отобранных и построить многоугольник полученного распределения.

Вероятность появления нестандартной детали в каждом случае равна 0,1.

Найдем вероятности того, что среди отобранных деталей:

1) Вообще нет нестандартных.

$$P_4(0) = \frac{4!}{0! \cdot 4!} 0{,}1^0 \cdot 0{,}9^4 = 0{,}6561$$

2) Одна нестандартная.

$$P_4(1) = \frac{4!}{1! \cdot 3!} 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^3 = 0{,}2916$$

3) Две нестандартные детали.

$$P_4(2) = \frac{4!}{2!\cdot 2!} 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^2 = 0{,}0486$$

4) Три нестандартные детали.

$$P_4(3) = \frac{4!}{3!\cdot 1!} 0{,}1^3 \cdot 0{,}9^1 = 0{,}0036$$

5) Четыре нестандартных детали.

$$P_4(4) = \frac{4!}{4!\cdot 0!} 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^0 = 0{,}0001$$

Пример. Две игральные кости одновременно бросают 2 раза. Написать биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа выпадений четного числа очков на двух игральных костях.

Каждая игральная кость имеет три варианта четных очков – 2, 4 и 6 из шести возможных, таким образом, вероятность выпадения четного числа очков на одной кости равна 0,5.

Вероятность одновременного выпадения четных очков на двух костях равна 0,25.

Вероятность того, что при двух испытаниях оба раза выпали четные очки на обеих костях, равна: $P_2(2) = \frac{2!}{0!\cdot 2!} 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^0 = 0{,}0625$

Вероятность того, что при двух испытаниях один раз выпали четные очки на обеих костях:

$$P_2(1) = \frac{2!}{1!\cdot 1!} 0{,}25^1 \cdot 0{,}75^1 = 0{,}375$$

Вероятность того, что при двух испытаниях ни одного раза не выпаде четного числа очков на обеих костях:

$$P_2(0) = \frac{2!}{0!\cdot 2!} 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^2 = 0{,}5625$$

Получаем ряд распределении случайной величины:

X	0	1	2
p	0,0625	0,375	0,5625

Числовые характеристики дискретных случайных величин.

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако, когда невозможно найти закон распределения, или этого не требуется, можно ограничиться нахождением значений, называемых числовыми характеристиками случайной величины. Эти величины определяют некоторое среднее значение, вокруг которого группируются значения случайной величины, и степень их разбросанности вокруг этого среднего значения.

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на их вероятности.

$$m_x = M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

С точки зрения вероятности можно сказать, что математическое ожидание приближенно равно среднему арифметическому наблюдаемых значений случайной величины.

Математическое ожидание М(Х) числа появления события А в п независимых испытаниях равно произведению числа испытаний на вероятность появления события в каждом испытании.

$$M(X) = np$$

Дисперсией (рассеиванием) дискретной случайной величины называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2$$

Пример. Для рассмотренного выше примера закон распределения случайной величины имеет вид:

X	0	1	2
p	0,0625	0,375	0,5625

Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины.

Математическое ожидание случайной величины равно:

$M(X) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 2 \cdot 0{,}5625 = 1{,}5$

Возможные значения квадрата отклонения:

$[x_1 - M(X)]^2 = (0 - 1{,}5)^2 = 2{,}25$

$[x_2 - M(X)]^2 = (1 - 1{,}5)^2 = 0{,}25$

$[x_3 - M(X)]^2 = (2 - 1{,}5)^2 = 0{,}25$

Тогда

$[X-M(X)]^2$	2,25	0,25	0,25
p	0,0625	0,375	0,5625

Дисперсия равна:

$D(X) = 2{,}25 \cdot 0{,}0625 + 0{,}25 \cdot 0{,}375 + 0{,}25 \cdot 0{,}5625 = 0{,}375$

Однако, на практике подобный способ вычисления дисперсии неудобен, т.к. приводит при большом количестве значений случайной величины к громоздким вычислениям.

Вычисление дисперсии.

Дисперсия равна разности между математическим ожиданием квадрата случайной величины Х и квадратом ее математического ожидания.

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$$

Применим эту формулу для рассмотренного выше примера:

X	0	1	2
X^2	0	1	4
p	0,0625	0,375	0,5625

$M(X^2) = 0 \cdot 0{,}0625 + 1 \cdot 0{,}375 + 4 \cdot 0{,}5625 = 2{,}625$

$D(X) = 2{,}625 - [1{,}5]^2 = 0{,}375$

Среднее квадратическое отклонение.

Средним квадратическим отклонением случайной величины X называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Пример. Завод выпускает 96% изделий первого сорта и 4% изделий второго сорта. Наугад выбирают 1000 изделий. Пусть X – число изделий первого сорта в данной выборке. Найти закон распределения, математическое ожидание и дисперсию случайной величины X.

Выбор каждого из 1000 изделий можно считать независимым испытанием, в котором вероятность появления изделия первого сорта одинакова и равна p = 0,96.

Таким образом, закон распределения может считаться биноминальным.

$$m_x = pn = 1000 \cdot 0{,}96 = 960;$$

$$D_x = npq = 1000 \cdot 0{,}96 \cdot 0{,}04 = 38{,}4;$$

Пример. Найти дисперсию дискретной случайной величины X – числа появлений события А в двух независимых испытаниях, если вероятности появления этого события в каждом испытании равны и известно, что M(X) = 0,9.

Т.к. случайная величина X распределена по биноминальному закону, то

$$M(X) = np = 2p = 0{,}9; \quad \Rightarrow \quad p = 0{,}45;$$

$$D(X) = npq = 2p(1-p) = 2 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}55 = 0{,}495.$$

Пример. Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события А в каждом испытании. Найти вероятность появления события А, если дисперсия числа появлений события в трех независимых испытаниях равна 0,63.

По формуле дисперсии биноминального закона получаем:

$$D(X) = npq = 3p(1-p) = 0{,}63;$$

$$3p^2 - 3p + 0{,}63 = 0$$

$$p^2 - p + 0{,}21 = 0;$$

$$p_1 = 0{,}7; \quad p_2 = 0{,}3;$$

Пример. Испытывается устройство, состоящее из четырех независимо работающих приборов. Вероятности отказа каждого из приборов равны соответственно $p_1=0{,}3$; $p_2=0{,}4$; $p_3=0{,}5$; $p_4=0{,}6$. Найти математическое ожидание и дисперсию числа отказавших приборов.

Принимая за случайную величину число отказавших приборов, видим что эта случайная величина может принимать значения 0, 1, 2, 3 или 4.

Для составления закона распределения этой случайной величины необходимо определить соответствующие вероятности. Примем $q_i = 1 - p_i$.

1) Не отказал ни один прибор.

$$p(0) = q_1 q_2 q_3 q_4 = 0{,}7 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}084.$$

2) Отказал один из приборов.

$$p(1) = p_1 q_2 q_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 q_4 + q_1 q_2 p_3 q_4 + q_1 q_2 q_3 p_4 = 0{,}302.$$

3) Отказали два прибора.

$$p(2) = p_1 p_2 q_3 q_4 + p_1 q_2 p_3 q_4 + p_1 q_2 q_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 q_4 + q_1 p_2 q_3 p_4 + q_1 q_2 p_3 p_4 = 0{,}38.$$

4) Отказали три прибора.

$$p(3) = p_1 p_2 p_3 q_4 + p_1 p_2 q_3 p_4 + p_1 q_2 p_3 p_4 + q_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}198.$$

5) Отказали все приборы.

$$p(4) = p_1 p_2 p_3 p_4 = 0{,}036.$$

Получаем закон распределения:

x	0	1	2	3	4

x^2	0	1	4	9	16
p	0,084	0,302	0,38	0,198	0,036

Математическое ожидание:

$$M(X) = 0{,}302 + 2 \cdot 0{,}38 + 3 \cdot 0{,}198 + 4 \cdot 0{,}036 = 1{,}8.$$

$$M(X^2) = 0{,}302 + 4 \cdot 0{,}38 + 9 \cdot 0{,}198 + 16 \cdot 0{,}036 = 4{,}18.$$

Дисперсия:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 4{,}18 - 3{,}24 = 0{,}94.$$

Пример. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из нее пять раз подряд извлекают шар, причем каждый раз вынутый шар возвращают обратно и шары перемешивают. Приняв за случайную величину X число извлеченных белых шаров, составить закон распределения этой величины, определить ее математическое ожидание и дисперсию.

Т.к. шары в каждом опыте возвращаются обратно и перемешиваются, то испытания можно считать независимыми (результат предыдущего опыта не влияет на вероятность появления или непоявления события в другом опыте).

Таким образом, вероятность появления белого шара в каждом опыте постоянна и равна $P_Б = \frac{6}{10} = 0{,}6.$

Таким образом, в результате пяти последовательных испытаний белый шар может не появиться вовсе, появиться один раз, два, три, четыре или пять раз.

Для составления закона распределения надо найти вероятности каждого из этих событий.

1) Белый шар не появился вовсе: $P_Б(0) = (1 - P_Б)^5 = 0{,}0102.$

2) Белый шар появился один раз: $P_Б(1) = C_5^1 P_Б^1 (1 - P_Б)^4 = \frac{5!}{1! \cdot 4!} 0{,}6 \cdot 0{,}4^4 = 0{,}0768$

3) Белый шар появиться два раза: $P_Б(2) = \frac{5!}{2! \cdot 3!} 0{,}6^2 \cdot 0{,}4^3 = 0{,}2304$.

4) Белый шар появиться три раза: $P_Б(3) = \frac{5!}{3!\cdot 2!} 0{,}6^3 \cdot 0{,}4^2 = 0{,}3456.$

5) Белый шар появиться четыре раза: $P_Б(4) = \frac{5!}{4!\cdot 1!} 0{,}6^4 \cdot 0{,}4^1 = 0{,}2592.$

6) Белый шар появился пять раз: $P_Б(5) = 0{,}6^5 = 0{,}0778.$

Получаем следующий закон распределения случайной величины X.

x	0	1	2	3	4	5
x^2	0	1	4	9	16	25
p(x)	0,0102	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,0778

$M(X) = 0{,}0768 + 2\cdot 0{,}2304 + 3\cdot 0{,}3456 + 4\cdot 0{,}2592 + 5\cdot 0{,}0778 = 3{,}0002.$

$M(X^2) = 0{,}0768 + 4\cdot 0{,}2304 + 9\cdot 0{,}3456 + 16\cdot 0{,}2592 + 25\cdot 0{,}0778 = 10{,}201.$

$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 10{,}201 - 9{,}0012 = 1{,}1998.$

Функция распределения.

Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее *x*.

$$F(x) = P(X < x)$$

Функцию распределения также называют интегральной функцией.

Функция распределения существует как для непрерывных, так и для дискретных случайных величин. Она полностью характеризует случайную величину и является одной из форм закона распределения.

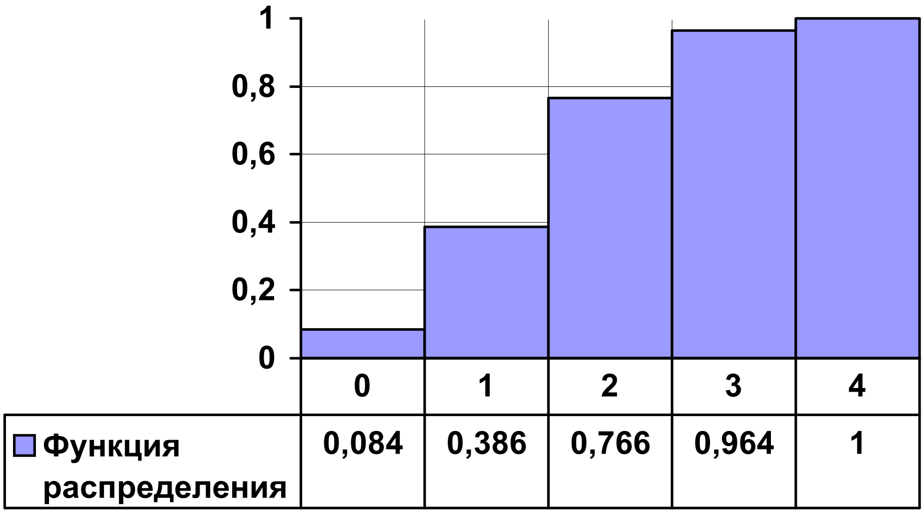
Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i)$$

Знак неравенства под знаком суммы показывает, что суммирование распространяется на те возможные значения случайной величины, которые меньше аргумента *x*.

Функция распределения дискретной случайной величины X разрывна и возрастает скачками при переходе через каждое значение x_i.

Так для примера, рассмотренного выше, функция распределения будет



иметь вид:

Свойства функции распределения..

1) значения функции распределения принадлежат отрезку [0, 1].

$$0 \le F(x) \le 1$$

2) F(x) – неубывающая функция: $F(x_2) \ge F(x_1)$ при $x_2 \ge x_1$

3) Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (*a, b*) , равна приращению функции распределения на этом интервале.

$$P(a \le X < b) = F(b) - F(a)$$

4) На минус бесконечности функция распределения равна нулю, на плюс бесконечности функция распределения равна единице.

5) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Плотность распределения.

Плотностью распределения вероятностей непрерывной случайной величины X называется функция *f(x)* – первая производная от функции распределения F(x).

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения также называют дифференциальной функцией. Для описания дискретной случайной величины плотность распределения неприемлема.Смысл плотности распределения состоит в том, что она показывает как часто появляется случайная величина X в некоторой окрестности точки *x* при повторении опытов.

Зная плотность распределения, можно вычислить вероятность того, что некоторая случайная величина X примет значение, принадлежащее заданному интервалу.

Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна определенному интегралу от плотности распределения, взятому в пределах от a до b.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx$$

Геометрически это означает, что вероятность того, что непрерывная случайная величина примет значение, принадлежащее интервалу (a, b), равна площади криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, кривой распределения f(x) и прямыми *x=a* и *x=b.*

Функция распределения может быть легко найдена, если известна плотность распределения, по формуле:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

Плотность распределения – неотрицательная функция.

$$f(x)\geq 0$$

Несобственный интеграл от плотности распределения в пределах от - ∞ до ∞ равен единице.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1.$$

Пример. Случайная величина подчинена закону распределения с плотностью:

$$f(x)=\begin{cases} a\sin x, & при \quad 0\leq x\leq \pi \\ 0, & при \quad x<0 \quad или \quad x>\pi \end{cases}$$

Требуется найти коэффициент *a*, построить график функции плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина попадет в интервал от 0 до $\frac{\pi}{4}$.

Для нахождения коэффициента *a* воспользуемся свойством $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=\int_{-\infty}^{0} 0dx+\int_{0}^{\pi} a\sin xdx+\int_{\pi}^{\infty} 0dx=a\int_{0}^{\pi}\sin xdx=-a\cos x\Big|_{0}^{\pi}=2a=1;$$

$$a=\frac{1}{2}.$$

Пример. Задана непрерывная случайная величина *x* своей функцией распределения *f(x)*.

$$f(x)=\begin{cases} A\cos 2x, & при \quad -\frac{\pi}{4}\leq x\leq \frac{\pi}{4} \\ 0, & при \quad |x|>\frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Требуется определить коэффициент А, найти функцию распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина x попадет в интервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

Найдем коэффициент А.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} A\cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \frac{A\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = A = 1.$$

Найдем функцию распределения:

1) На участке $x < -\frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} 0dx = 0.$

2) На участке $-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{x} \cos 2xdx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2}.$

3) На участке $x > \frac{\pi}{4}$: $F(x) = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{x} 0dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = 1.$

Итого: $f(x) = \begin{cases} \cos 2x, & при \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4} \\ 0, & при \quad |x| > \frac{\pi}{4} \end{cases}$; $\quad F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < -\frac{\pi}{4} \\ \frac{\sin 2x + 1}{2}, & при \quad -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}; \\ 1, & при \quad x > \frac{\pi}{4} \end{cases}$

Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = \int_{\pi/6}^{2} f(x)dx = \int_{\pi/6}^{\pi/4} \cos 2xdx + \int_{\pi/4}^{2} 0dx = \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067;$$

Ту же самую вероятность можно искать и другим способом:

$$P\left(\frac{\pi}{6} < x < 2\right) = F(2) - F(\pi/6) = 1 - \frac{\sin(\pi/3)+1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0{,}067.$$

Числовые характеристики непрерывных случайных величин.

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины X, возможные значения которой принадлежат отрезку [a,b], называется определенный интеграл

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx$$

Если возможные значения случайной величины рассматриваются на всей числовой оси, то математическое ожидание находится по формуле:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

При этом, конечно, предполагается, что несобственный интеграл сходится.

Дисперсией непрерывной случайной величины называется математическое ожидание квадрата ее отклонения.

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx$$

По аналогии с дисперсией дискретной случайной величины, для практического вычисления дисперсии используется формула:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2$$

Средним квадратичным отклонением называется квадратный корень из дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$$

Пример. Случайная величина X задана интегральной функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ x^2 & \text{при } 0 \le x \le 2, \\ 4 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти функцию плотности распределения $f(x)$ (дифференциальную функцию распределения), $M(X)$, $D(X)$.

Дифференциальная функция распределения имеет вид

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 2x & \text{при } 0 \le x \le 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Математическое ожидание непрерывной случайной величины X определяется формулой:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx$$

Наша функция вне промежутка [0; 2] равна нулю, следовательно,

$$M(X) = \int_0^2 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^2 = \frac{16}{3}.$$

Дисперсия непрерывной случайной величины, по общему правилу,

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x)dx.$$

В нашем случае,

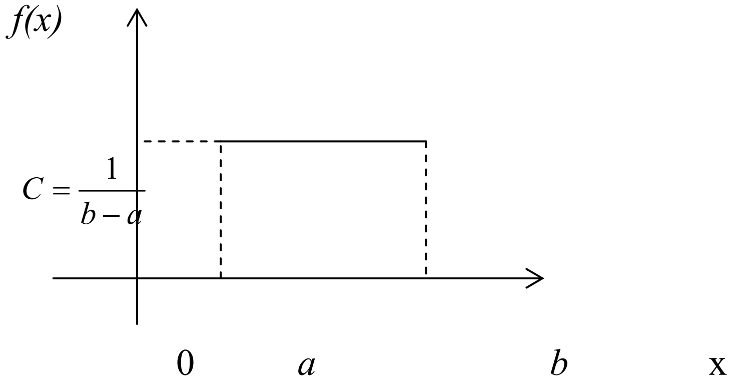
$$D(X) = \int_0^2 \left(x - \frac{16}{3}\right)^2 \cdot 2xdx = 2\int_0^2 \left(x^3 - \frac{32}{3}x^2 + \frac{256}{9}x\right)dx =$$

$$\left(\frac{x^4}{2} - \frac{32}{9}x^3 + \frac{178}{9}x\right)\Big|_0^2 = 8 - \frac{256}{9} + \frac{712}{9} = \frac{2008}{9} \approx 223{,}11$$

Равномерное распределение.

Непрерывная случайная величина имеет распределение на отрезке [a, b], если на этом отрезке плотность распределения случайной величины постоянна, а вне его равна нулю.

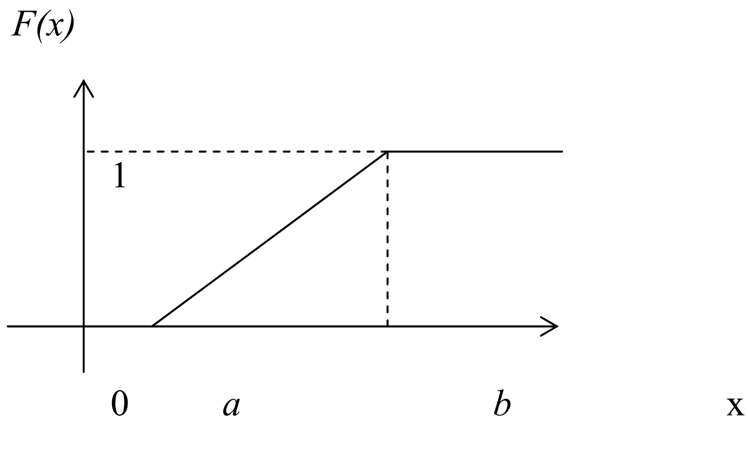
$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b\\ 0, & x>b\end{cases}$$



Найдем функцию распределения *F(x)* на отрезке [*a,b*].

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{a}^{x}\frac{1}{b-a}dx=\frac{x}{b-a}\Big|_{a}^{x}=\frac{x-a}{b-a}.$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & при \quad a\le x\le b\\ 1, & при \quad x>b\end{cases}$$



Для того, чтобы случайная величина подчинялась закону равномерного распределения необходимо, чтобы ее значения лежали внутри некоторого определенного интервала, и внутри этого интервала значения этой случайной величины были бы равновероятны.

Определим математическое ожидание и дисперсию случайной величины, подчиненной равномерному закону распределения.

$$m_x = \int_a^b x f(x)dx = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b = \frac{a+b}{2}.$$

$$m_{x^2} = \int_a^b x^2 f(x)dx = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx = \frac{x^3}{3(b-a)}\Big|_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}.$$

$$D_x = m_{x^2} - m_x^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

$$\sigma_x = \sqrt{D_x} = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Вероятность попадания случайной величины в заданный интервал:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{b-a} = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.$$

Показательное распределение.

Показательным (экспоненциальным) называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины X, которое описывается плотностью

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & при \quad x \ge 0 \end{cases}$$

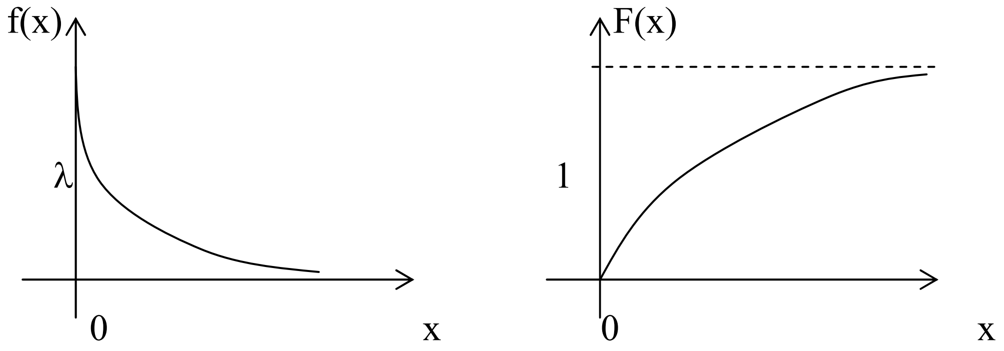
где λ - положительное число.

Найдем закон распределения.

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \lambda\int_0^x e^{-\lambda x}dx = 1 - e^{-\lambda x}.$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & при \quad x \ge 0 \end{cases}$$

Графики функции распределения и плотности распределения:



Найдем математическое ожидание случайной величины, подчиненной показательному распределению.

$$m_x = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_{0}^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx = \left\{\begin{matrix} u = x; & e^{-\lambda x}dx = dv; \\ du = dx; & -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda} = v; \end{matrix}\right\} = \lambda\left(-\frac{xe^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}dx\right) =$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-\lambda x}dx = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda}.$$

Результат получен с использованием того факта, что

$$xe^{-\lambda x}\Big|_0^{\infty} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{\lambda x}} - 0 = \left\{\begin{matrix} \text{По} \quad \text{правилу} \\ \text{Лопиталя} \end{matrix}\right\} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{-\lambda e^{\lambda x}} = 0.$$

Для нахождения дисперсии найдем величину M(X^2):

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty}\lambda x^2 e^{-\lambda x}dx$$

Дважды интегрируя по частям, аналогично рассмотренному случаю, получим:

$$M(X^2) = \frac{2}{\lambda^2};$$

Тогда $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$

$$M(X) = \frac{1}{\lambda}; \quad D(X) = \frac{1}{\lambda^2}; \quad \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

$$P(a < x < b) = F(b) - F(a) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

Показательное распределение широко используется в теории надежности.

Допустим, некоторое устройство начинает работать в момент времени $t_0=0$, а через какое– то время t происходит отказ устройства.

Обозначим T непрерывную случайную величину – длительность безотказной работы устройства.

Таким образом, функция распределения $F(t) = P(T<t)$ определяет вероятность отказа за время длительностью t. Вероятность противоположного события (безотказная работа в течение времени t) равна $R(t) = P(T>t) = 1 - F(t)$.

Функцией надежности $R(t)$ называют функцию, определяющую вероятность безотказной работы устройства в течение времени t.

Часто на практике длительность безотказной работы подчиняется показательному закону распределению. Вообще говоря, если рассматривать новое устройство, то вероятность отказа в начале его функционирования будет больше, затем количество отказов снизится и будет некоторое время иметь практически одно и то же значение. Затем (когда устройство выработает свой ресурс) количество отказов будет возрастать. Другими словами, можно сказать, что функционирование устройства на протяжении всего существования (в смысле количества отказов) можно описать комбинацией двух показательных законов (в начале и конце функционирования) и равномерного закона распределения.

Функция надежности для какого- либо устройства при показательном законе распределения равна: $R(t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda t}$.

Данное соотношение называют показательным законом надежности. Важным свойством, позволяющим значительно упростить решение задач теории надежности, является то, что вероятность безотказной работы устройства на интервале времени t не зависит от времени предшествующей работы до начала рассматриваемого интервала, а зависит только от длительности времени t. Таким образом, безотказная работа устройства зависит только от интенсивности отказов λ и не зависит от безотказной работы устройства в прошлом. Так как подобным свойством обладает только показательный закон распределения, то этот факт позволяет определить, является ли закон распределения случайной величины показательным или нет.

Нормальный закон распределения.

Нормальным называется распределение вероятностей непрерывной случайной величины, которое описывается плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}};$$

Нормальный закон распределения также называется законом Гаусса.

Нормальный закон распределения занимает центральное место в теории вероятностей. Это обусловлено тем, что этот закон проявляется во всех случаях, когда случайная величина является результатом действия большого числа различных факторов. К нормальному закону приближаются все остальные законы распределения.

Можно легко показать, что параметры m_x и σ_x, входящие в плотность распределения являются соответственно математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением случайной величины X.

Найдем функцию распределения *F(x)*.

$$F(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-m_x)^2}{2\sigma_x^2}}dx$$

График плотности нормального распределения называется нормальной кривой или кривой Гаусса.

Нормальная кривая обладает следующими свойствами:

1) Функция определена на всей числовой оси.

2) При всех *x* функция распределения принимает только положительные значения.

3) Ось OX является горизонтальной асимптотой графика плотности вероятности, т.к. при неограниченном возрастании по абсолютной величине аргумента *x*, значение функции стремится к нулю.

4) Найдем экстремум функции.

$$y' = -\frac{x-m}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} = 0; \qquad x = m;$$

Т.к. при $y' > 0$ при $x < m$ и $y' < 0$ при $x > m$, то в точке $x = m$ функция имеет максимум, равный $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

5) Функция является симметричной относительно прямой $x = a$, т.к. разность $(x - a)$ входит в функцию плотности распределения в квадрате.

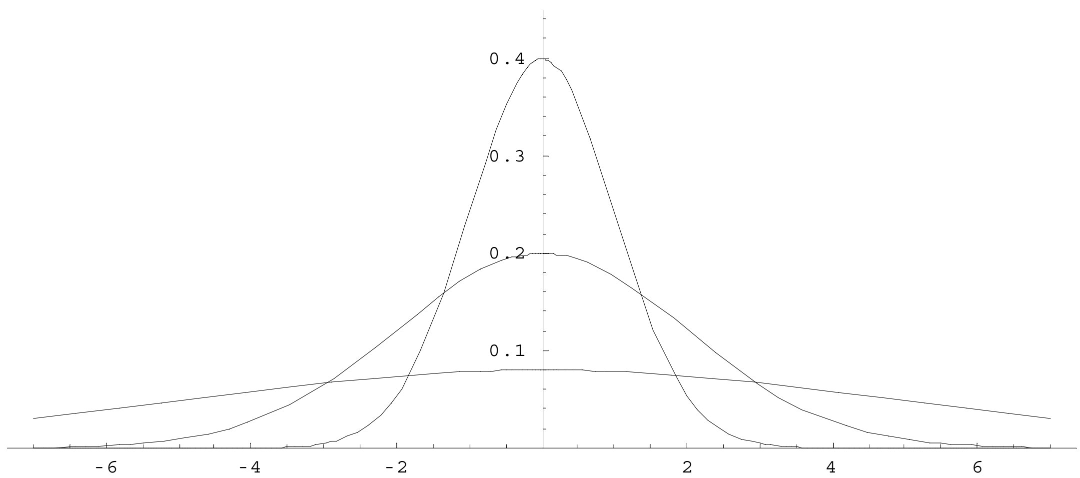
6) Для нахождения точек перегиба графика найдем вторую производную функции плотности.

$$y'' = -\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \left[1 - \frac{(x-m)^2}{\sigma^2}\right]$$

При $x = m + \sigma$ и $x = m - \sigma$ вторая производная равна нулю, а при переходе через эти точки меняет знак, т.е. в этих точках функция имеет перегиб.

В этих точках значение функции равно $\frac{1}{\sigma e\sqrt{2\pi}}$.

График функции плотности распределения.



Построены графики при m =0 и трех возможных значениях среднего квадратичного отклонения $\sigma = 1$, $\sigma = 2$ и $\sigma = 7$. Как видно, при увеличении значения среднего квадратичного отклонения график становится более пологим, а максимальное значение уменьшается..

Если $a > 0$, то график сместится в положительном направлении, если $a < 0$ – в отрицательном.

При $a = 0$ и $\sigma = 1$ кривая называется нормированной. Уравнение нормированной кривой:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Найдем вероятность попадания случайной величины, распределенной по нормальному закону, в заданный интервал.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx$$

Обозначим $\frac{x-m}{\sigma\sqrt{2}} = t; \quad \frac{a-m}{\sigma\sqrt{2}} = \alpha; \quad \frac{b-m}{\sigma\sqrt{2}} = \beta;$

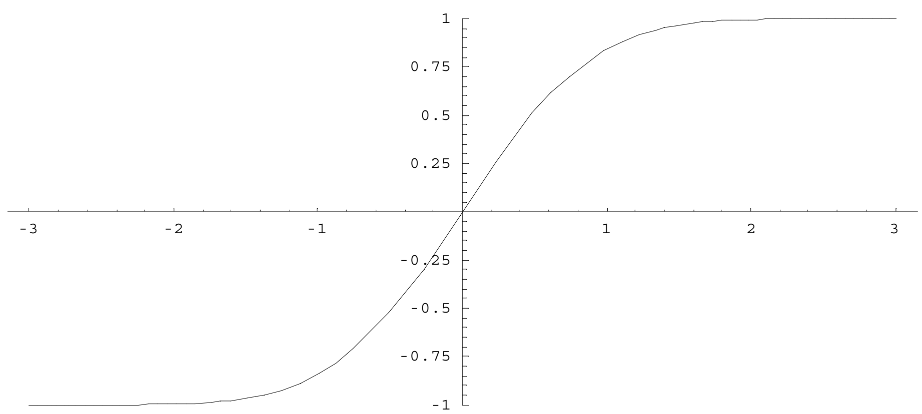
Тогда $P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-t^2}\sigma\sqrt{2}dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\alpha^\beta e^{-t^2}dt = \frac{1}{2}\left[\Phi(\beta) - \Phi(\alpha)\right]$

Т.к. интеграл $\int e^{-t^2}dt$ не выражается через элементарные функции, то вводится в рассмотрение функция

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}dt,$$

которая называется функцией Лапласа или интегралом вероятностей.

Значения этой функции при различных значениях x посчитаны и приводятся в специальных таблицах. Ниже показан график функции Лапласа.



Функция Лапласа обладает следующими свойствами:

1) $\Phi(0) = 0$;

2) $\Phi(-x) = - \Phi(x)$;

3) $\Phi(\infty) = 1$.

Функцию Лапласа также называют функцией ошибок и обозначают $\operatorname{erf} x$.

При рассмотрении нормального закона распределения выделяется важный частный случай, известный как правило трех сигм.Запишем вероятность того, что отклонение нормально распределенной случайной величины от математического ожидания меньше заданной величины Δ:

Если принять $\Delta = 3\sigma$, то получаем с использованием таблиц значений функции Лапласа:

$$P(|X-m| < 3\sigma) = 2\overline{\Phi}(3) = 2 \cdot 0{,}49865 = 0{,}9973$$

Т.е. вероятность того, что случайная величина отклонится от своего математического ожидание на величину, большую чем утроенное среднее квадратичное отклонение, практически равна нулю. Это правило называется правилом трех сигм.

Не практике считается, что если для какой – либо случайной величины выполняется правило трех сигм, то эта случайная величина имеет нормальное распределение.

Пример. Поезд состоит из 100 вагонов. Масса каждого вагона – случайная величина, распределенная по нормальному закону с математическим ожидание a = 65 т и средним квадратичным отклонением σ = 0,9 т. Локомотив может везти состав массой не более 6600 т, в противном случае необходимо прицеплять второй локомотив. Найти вероятность того, что второй локомотив не потребуется.

Второй локомотив не потребуется, если отклонение массы состава от ожидаемого ($100\cdot65 = 6500$) не превосходит $6600 – 6500 = 100$ т.

Т.к. масса каждого вагона имеет нормальное распределение, то и масса всего состава тоже будет распределена нормально.

Получаем:

$$P(|X - M(X)| < 100 = 2\overline{\Phi}\left[\frac{100}{100\sigma}\right] = 2\overline{\Phi}[1{,}111] = 2 \cdot 0{,}3665 = 0{,}733$$

Элементы математической статистики

Пример Пусть дана случайная выборка, состоящая из 100 значений признака *X:*

50,2	54,0	41,0	42,0	58,2	59,3	84,8	45,0	76,5	58,3
21,0	55,0	45,0	21,5	46,0	44,0	42,5	49,0	48,7	75,0
15,3	55,0	23,8	46,5	53,0	62,8	78,5	67,0	34,5	49,9
49,7	63,0	30,0	32,0	42,4	22,4	52,0	70,4	57,2	50,0
23,0	47,8	47,4	50,8	78,3	27,0	56,6	51,3	58,6	28,4
51,7	50,0	48,8	49,4	57,5	47,4	33,5	27,0	39,7	57,5
18,4	35,6	28,4	37,6	49,5	26,7	54,0	68,6	29,3	62,7
43,8	44,0	69,1	46,3	76,7	37,1	69,2	39,3	30,0	43,0
85,0	63,0	30,0	43,8	64,8	22,0	38,8	42,3	64,8	41,0
30,0	10,0	63,0	48,8	71,2	54,4	47,8	31,2	46,1	17,8

Требуется определить закон распределения признака *X*; найти точечные статистические оценки его математического ожидания, дисперсии и среднего квадратического отклонения.

Можно упорядочить элементы выборки по возрастанию, указав частоту встречаемости каждого из них. Получился бы т.н. вариационный ряд. Но значения *X* в таблице почти не повторяются. Поэтому мы построим интервальное распределение значений *X*.

Прежде всего, отметим, что $x_{\min} = 10$, $x_{\max} = 85$, а размах выборочных значений $R = x_{\max} - x_{\min} = 75$.

Теперь определим длину каждого частичного интервала (иногда их называют классовыми интервалами), воспользовавшись формулой Стэрджеса

$$l = \frac{R}{(1 + 3{,}322\lg n)} = \frac{75}{(1 + 3{,}322\lg 100)} = 9{,}81 \approx 10$$

, где $n = 100$ — объем выборки.

Установим границы частичных интервалов. Нижнюю границу первого интервала принимаем равной $x_0 = x_{min} - l/2 = 10 - 5 = 5$, а его верхнюю границу $x_l = x_0 + l = 5 + 10 = 15$; второй интервал будет (15; 25), третий (25; 35) и так далее до выполнения условия $x_{\max} \le x_{\mathrm{m}}$, где x_{m} — верхняя граница последнего интервала (напомним, что у нас $x_{\max} = 85$). Если некоторое выборочное значение повторяется несколько раз и при этом совпадает с границей двух соседних интервалов, то его договоримся относить к левому интервалу. Так, в нашем случае число 55 дважды будет отнесено к интервалу (45;55) и ни разу — к интервалу (55;65).

В итоге этих действий получаем следующее интервальное распределение исходной выборки, куда внесены не только частоты n_i, но и относительные частоты $w_i = n_i/n$ выборочных значений признака, попавшего в i-тый частичный интервал:

x_{i-1}—	5–15	15–	25–	35–	45–	55–	65–	75–
n_i	1	9	14	19	29	15	7	6
w_i	0,01	0,09	0,14	0,19	0,29	0,15	0,07	0,06

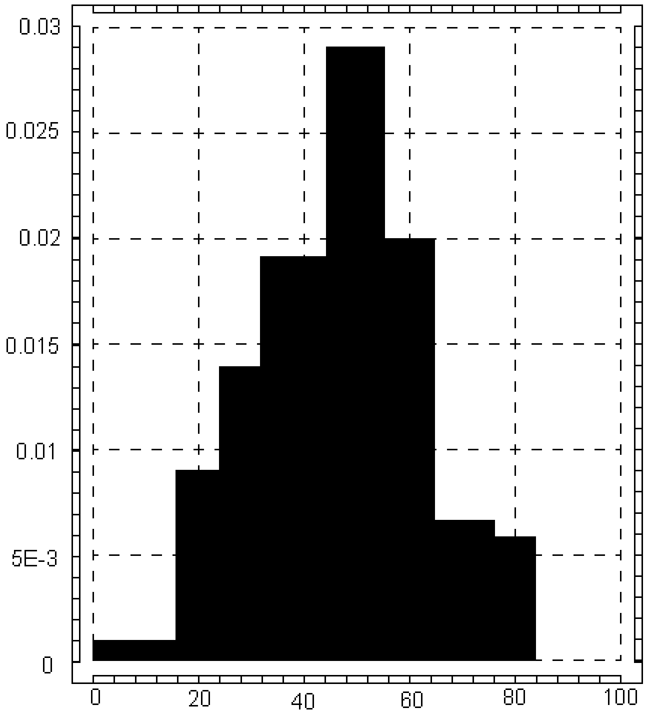
Для проверки правильности заполнения таблицы нужно убедиться, что сумма элементов второй строки равна объему выборки (в нашем примере n = 100), а сумма элементов третьей строки равна единице.

Распределение непрерывной случайной величины характеризуется функцией плотности вероятностей (дифференциальным законом распределения). В статистике ее оценкой является гистограмма относительных частот. Это ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы, а длины высот вычисляются по формуле.

В нашем примере

n_i	0,001	0,009	0,014	0,019	0,0290	0,015	0,007	0,006

и гистограмма относительных частот имеет следующий вид (рис. 5.1):



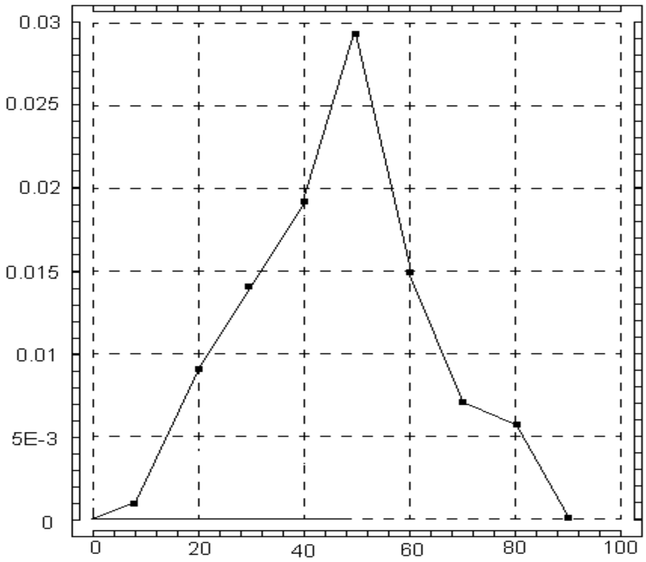
(по горизонтальной оси отложены выборочные значения X_i ,по вертикальной — высоты «частичных» прямоугольников (плотности относительных частот) $h_i = w_i/l$).

От интервального распределения выборки перейдем к точечному (дискретному) распределению, взяв за новые выборочные значения признака середины частичных интервалов. В рассматриваемом примере такое распределение, очевидно, имеет вид следующей таблицы:

x_i	10	20	30	40	50	60	70	80
n_i	1	9	14	19	29	15	7	6
w_i	0,01	0,09	0,14	0,19	0,29	0,15	0,07	0,06

Для наглядности можно построить полигон относительных частот. Это ломаная линия, вершины которой находятся в точках (x_i, w_i).

В рассматриваемом случае в соответствии с таблицей 2 полигон относительных частот имеет вид, изображенный на рис. 5.2.



(По горизонтальной оси отложены выборочные значения x_i, по вертикальной — относительные частоты выборочных значений w_i**)**.

Для точечного распределения выборки можно построить эмпирическую функцию распределения $F^*(x)$. Она является статистической оценкой функции распределения вероятностей признака X (интегрального закона распределения) и строится по формуле

$$F^*(X) = \frac{n_x}{n},$$

где n — объем выборки, а n_x — сумма частот выборочных значений признака, которые меньше X . В нашем примере, очевидно,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & x \le 10 \\ 0{,}01 & 10 < x \le 20 \\ 0{,}10 & 20 < x \le 30 \\ 0{,}24 & 30 < x \le 40 \\ 0{,}43 & 40 < x \le 50 \\ 0{,}72 & 50 < x \le 60 \\ 0{,}87 & 60 < x \le 70 \\ 0{,}94 & 70 < x \le 80 \\ 1 & x > 80 \end{cases}$$

Аналогом эмпирической функции распределения является кумулята относительных частот (кумулятивная кривая), представляющая собой для точечного (дискретного) выборочного распределения ломаную линию с вершинами в точках (x_i, n_x/n), где n — объем выборки, а n_x — сумма частот выборочных значений признака X, которые меньше, чем x_i. Ясно, что и эмпирическая функция распределения, и кумулята относительных частот характеризуют процесс накопления этих частот в рассматриваемой выборке.

В нашем примере в соответствии с таблицей 2 кумулята относительных частот имеет вид, показанный на рис. 5.3.

Важнейшими характеристиками случайной величины X являются, как известно, математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение (с.к.о.). Точечными статистическими оценками этих параметров служат соответственно выборочное среднее $\overline{X}$, выборочная дисперсия $D_{\text{выб}} = \sigma_n^2$ и исправленная выборочная дисперсия $\sigma_{n-1}^2 = s^2$, выборочное с.к.о. $\sigma_{\text{выб}} = \sigma_n$ и исправленное выборочное с.к.о. $\sigma_{n-1} = s$, которые вычисляются по формулам

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i,$$

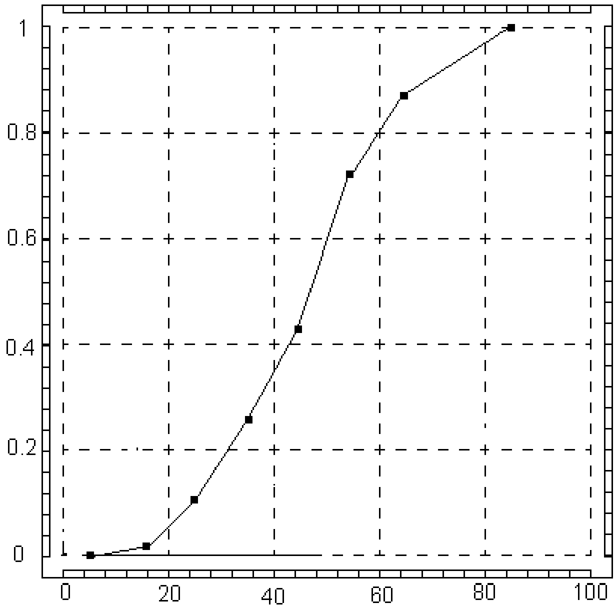
$$D_{\text{выб}} = \sigma_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x_i}\right)^2 n_i, \quad \text{или} \quad D_{\text{выб}} = \sigma_n^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2,$$

$$\sigma_{n-1}^2 = s^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_n^2,$$

$$\sigma_n = \sqrt{\sigma_n^2},$$

$$\sigma_{n-1} = s = \sqrt{\sigma_{n-1}^2},$$

где x_i — выборочное значение признака X, n_i — частоты этих значений, n-объем выборки



(По горизонтальной оси отложены выборочные значения, по вертикальной — относительные частоты выборочных значений).

Воспользовавшись перечисленными выше формулами, вычислим точечные статистические оценки генеральных параметров распределения признака X, используя при этом данные из таблицы на с. 44:

$$\overline{X} = \frac{1}{100}(10\cdot 1 + 20\cdot 9 + 30\cdot 14 + 40\cdot 19 + 50\cdot 29 + \\ + 60\cdot 15 + 70\cdot 7 + 80\cdot 6) = 46{,}9.$$

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{100}[(10-46{,}9)^2\cdot 1 + (20-46{,}9)^2\cdot 9 + (30-46{,}9)^2\cdot 14 + \\ + (40-46{,}9)^2\cdot 19 + +(50-46{,}9)^2\cdot 29 + (60-46{,}9)^2\cdot 15 + \\ + (70-46{,}9)^2\cdot 7 + (80-46{,}9)^2\cdot 6) = 259{,}39.$$

$$s^2 = \sigma_{n-1}^2 = \frac{100}{100-1}\cdot 259{,}39 \approx 262{,}01.$$

$$\sigma_n = \sqrt{259{,}39} \approx 16{,}11.$$

$$s = \sigma_{n-1} = \sqrt{262{,}01} \approx 16{,}19.$$

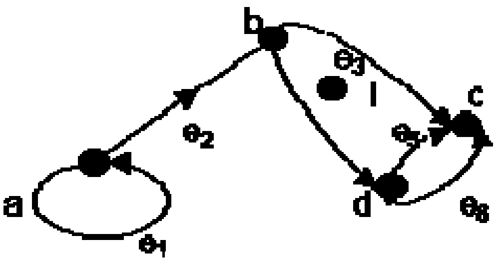
Основы теории графов

При решении практических задач довольно часто возникает необходимость указывать направление на ребрах графа (ориентировать ребра).

Ориентированным графом (сокращенно: орграфом) называется множество точек и соединяющих эти точки ориентированных непрерывных линий.

Точки, как и прежде, будем называть *вершинами*, ориентированные линии – *дугами* графа. Орграф часто будем обозначать парой (V,E), где V – множество вершин, E – множество дуг графа. При изображении орграфа ориентацию будем указывать стрелкой на дуге. Если дуга e, соединяющая вершины x и y, ориентирована от x и y, то будем говорить, что x – *начало* дуги и x – *конец* дуги e, или что дуга e *выходит* из x и *заходит* в y. Такую дугу e будем иногда называть *(x,y)–дугой*. Например, дуга e_2 выходит из вершины a и заходит в вершину b .

Вершины x и y будем называть *смежными*, если существует (x,y)–дуга или (y,x)–дуга. Если дуга e соединяет вершины x и y, то будем говорить, что e *инцидентна* вершинам x и y.



Дугу, выходящую из некоторой вершины и заходящую в ту же вершину, будем называть *петлей*, а дуги, выходящие из одной и той же вершины и заходящие в одну и ту же вершину, будем называть *кратными*. Так, дуги e_5 и e_6 являются кратными, а дуга e_1 – петлей (см. рис. 6.1). Вершину, из которой не выходит и в которую не заходит ни одна дуга, будем называть *изолированной*. Например, i – изолированная вершина.

Обобщим понятие степени вершины для орграфов.

Определение. Пусть G – орграф. *Полустепенью исхода* $\square^{-}(v)$ вершины v графа G называется число дуг, выходящих из v, полустепенью захода $\square^{+}(v)$ – число дуг, заходящих в v.

Например, для графа, изображенного на рисунке, имеем, что $\square^{-}(b)=2$, $\square^{+}(b)=1$, $\square^{-}(c)=0$, $\square^{+}(c)=3$.

Сумма полустепеней исхода всех вершин графа равна сумме полустепеней захода всех вершин.

Вершина v ориентированного графа называется *источником*, если $\square^{+}(v)\square 0$ и $\square^{-}(v)\square 0$, и *стоком*, если $\square^{+}(v)\square 0$ и $\square^{-}(v)=0$.

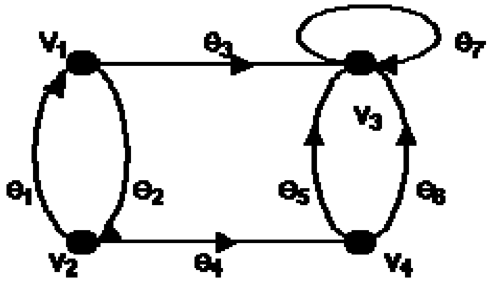
Так для графа на рисунке вершина с является стоком, а источника этот граф не имеет. Ясно, что орграф может иметь несколько источников и стоков.

Ориентированные графы возникают в различных областях. Так, например, блок–схема алгоритма решения задачи является ориентированным графом, где вершинами являются блоки. Схема различных коммуникаций с односторонним движением, эйлеров граф с указанным направлением обхода ребер, схема маршрутов движения на местности – примеры ориентированных графов.

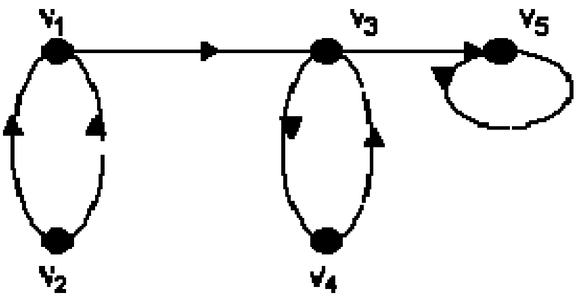
Как и в неориентированном случае, мы будем задавать орграф, изображая на рисунке соответствующую геометрическую фигуру. Однако для решения задач, связанных с графами на компьютере, такое задание графа является неудобным. Для задания графа в этих случаях используются фактически те же способы, что и в неориентированном случае. Пусть n – число вершин, m – число ребер орграфа $G=(V,E)$, $V=\{v_1,v_2,\dots,v_n\}$ и $E=\{e_1,e_2,\dots e_m\}$. Матрица *инцидентности* графа G – это матрица $A=(a_{ij})$ размера $n \times m$ такая, что

$$a_{ij} = \begin{cases} +1, \text{ если вершина } x_i \text{ – начало дуги } e_j, \\ -1, \text{ если вершина } x_i \text{ – конец дуги } e_j \\ 2, \text{ если } e_j \text{ – петля при вершине } x_i, \\ 0 \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Матрица смежности графа G – это квадратная матрица $B=(b_{ij})$ порядка n такая, что b_{ij} есть число дуг с началом в вершине v_i и концов в v_j. Ниже приведены примеры задания графов соответственно матрицами инцидентности и смежности.



$$\begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



$$\begin{array}{c|ccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ v_1 & C & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_3 & C & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_4 & C & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_5 & C & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

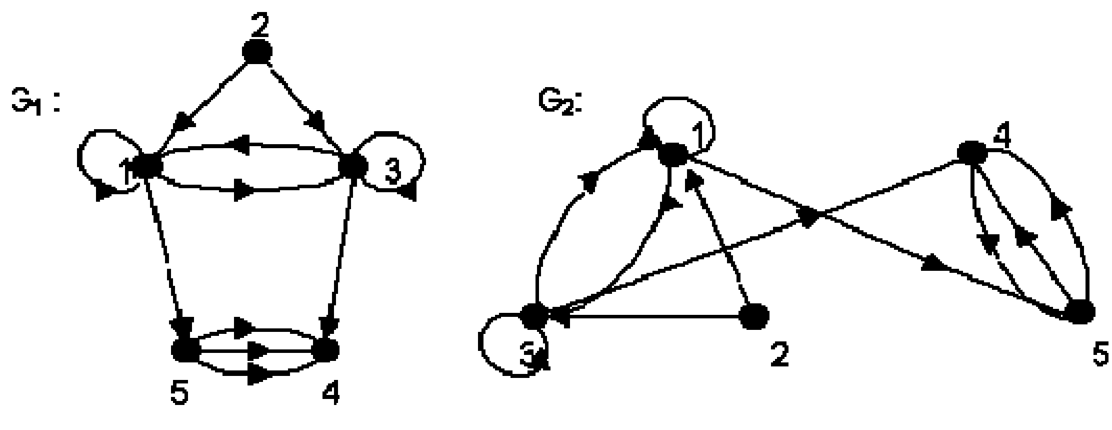
Для задания орграфов используются также *списки смежностей* и *список ду*г. В первом случае для каждой вершины v формируется список вершин, в которые заходят дуги, выходящие из v. В списке дуг каждая дуга e представляется парой вершин (x,y), где x – начало, y – конец дуги e.

Орграфы $G_1=(V_1,E_1)$ и $G_2=(V_2,E_2)$ *изоморфны*, если существует биекция □□ V_1□V_2 такая, что для любых вершин x,y□V_1 число (x,y)–дуг из E_1 равно числу (□(x), □(y)) – дуг из E_2.

Графы G_1 и G_2, изображенные на рис. 6.4, изоморфны; биекция □ определяется нумерацией вершин.

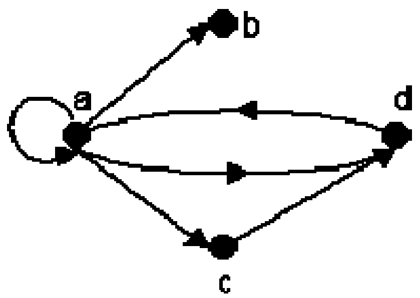
Орграф G′=(V′,E′) называется *подграфом* орграфа G=(V,E), если V′□V, E′□E и если дуга e инцидентна вершинам x и y и e□E′, x,y□V′. Если V′=V, то подграф G′ называется *суграфом*.

Примеров приводить не будем, поскольку понятие подграфа в ориентированном случае полностью аналогично такому же понятию в неориентированном случае.



(x,y)□R□ в графе G существует (x,y)–дуга.

В этом случае граф G мы будем иногда называть *графом бинарного отношения* R. Например, графу G,



соответствует отношение R={(a,a), (a,b), (a,c), (a,d), (c,d), (d,a)}, заданное на множестве V={a,b,c,d}.

Условимся, что в этом и следующих параграфах рассматриваются орграфы без петель и кратных дуг. Введем аналоги понятий маршрута, циклического маршрута и их частных случаев для орграфа.

Пусть G – орграф. *Ориентированным маршрутом* (или *ормаршрутом*) графа G называется последовательность дуг $e_1,e_2,\ldots,e_k$, для которой существует последовательность вершин $v_0,v_1,\ldots,v_k$ такая, что дуга e_i выходит из v_{i-1} и заходит в v_i для $1\leq i\leq k$. Вершина v_0 называется *началом*, v_k – *концом* маршрута, а число k – *длиной* маршрута.

Мы будем говорить, что маршрут $e_1,e_2,\ldots,e_k$ проходит через дуги $e_1,\ldots,e_k$ и вершины $v_0,v_1,\ldots,v_k$. Так как рассматриваются орграфы без петель и кратных дуг, то последовательность вершин $v_0,v_1,\ldots,v_k$ однозначно определяет маршрут $e_1,\ldots,e_k$. Этим фактом мы будем иногда пользоваться при задании маршрута. Маршрут с началом в вершине v и концом в вершине w будем называть (v,w)–маршрутом.

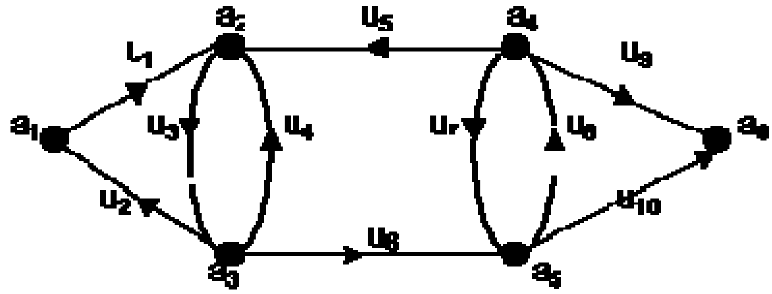
Ормаршрут, у которого начало совпадает с концом называется *циклическим ормаршрутом*. Например, для графа G, изображенного на рис. 6.6 последовательность дуг u_1,u_3,u_6,u_{10} является ормаршрутом, а последовательность дуг $u_1,u_3,u_6,u_8,u_5,u_3,u_2$ – циклическим ормаршрутом.

Ормаршрут называется *путем*, если он проходит по разным дугам и *простым* путем, если он проходит по разным вершинам (кроме возможного случая $v_0=v_k$). Циклический путь называется *контуром*, а циклический простой путь – *простым контуром*.

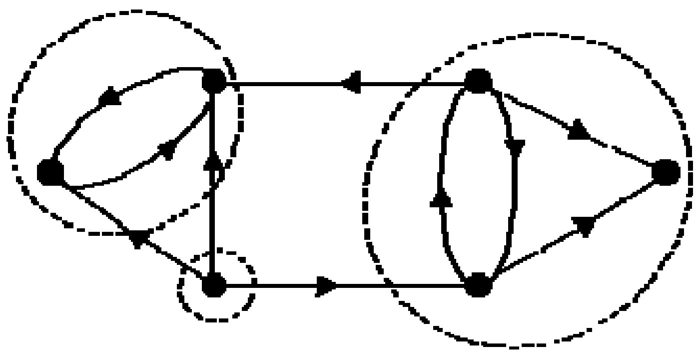
Так, для графа на рис. 6.6 последовательность u_3,u_6,u_8,u_7,u_{10} – путь, который не является простым путем, так как дважды проходит через вершину a_5, а последовательность u_3,u_6,u_8,u_5 – простой контур.

Пусть x и y – вершины орграфа G. Вершина y *достижима из x*, если существует (x,y)–путь. Любая вершина достижима сама из себя. Вершины x и y *сильно связаны*, если они достижимы одна из другой.

Например, для графа, изображенного на рисунке, вершины a_1 и a_4 сильно связаны, вершина a_6 достижима из a_1, но вершина a_1 недостижима из a_6.

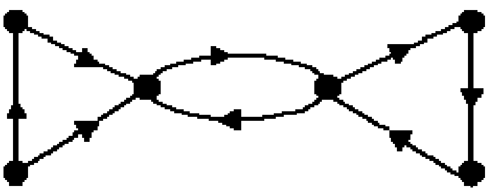
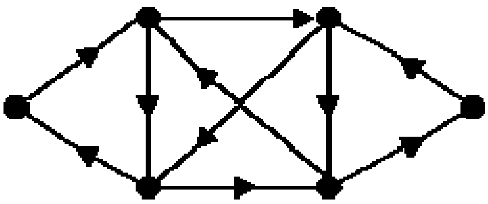


Легко видеть, что отношение сильной связности является отношением эквивалентности. Этому отношению соответствует разбиение на классы сильно связанных между собой вершин. Класс разбиения (вместе с дугами, которые соединяют вершины этого класса) называется *компонентой сильной связности*. Граф, изображенный на рисунке имеет три компоненты сильной связности. Они обведены пунктирными линиями.



Заметим, что существуют дуги, не принадлежащие ни одной из компонент сильной связности. Орграф называется сильно связным, если любые две его вершины сильно связаны. Другими словами, орграф сильно связан, если он состоит из одной компоненты сильной связности. Орграф называется эйлеровым, если в нем существует контур, проходящий через каждую дугу.

Граф G_2 является эйлеровым, а G_1 нет.

G_1:  G_2: 

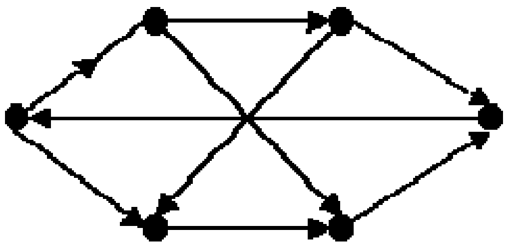
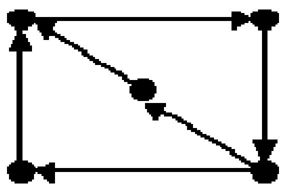
Ясно, что эйлеров граф без изолированных вершин будет сильно связным. Нетрудно понять также, что в таком графе полустепень исхода вершины равна полустепени захода. Оказывается справедливо и обратное.

Орграф G без изолированных вершин является эйлеровым тогда и только тогда, когда G сильно связан и $\square^{+}(v)=\square^{-}(v)$ для любой вершины v графа G.

Теорема представляет собой аналог теоремы Эйлера о циклах. Доказательство теоремы 6.1 легко получается из доказательства теоремы Эйлера и поэтому здесь не приводится.

Орграф называется гамильтоновым, если в нем существует простой контур, проходящий через каждую вершину.

Граф G_3, изображенный на рисунке, является гамильтоновым, а граф G_4 не является таковым.

G_3:  G_4: 

Задача распознавания гамильтоновости в классе орграфов имеет ту же вычислительную сложность, что и в неориентированном случае.

Задания для самопроверки

ТЕСТ 1 Случайные события

1. Набирая номер телефона, абонент забыл последнюю цифру и набрал ее наудачу. Найти вероятность того, что набрана нужная цифра.

Варианты ответов:	0,1	0,2	0,5	10

2. Два человека садятся в электричку. Каждый может сесть в любой из 7 вагонов. Какая вероятность, что они:

а) поедут в одном вагоне?

Варианты ответов:	0,7	6/7	1/7	12/49

3. б) поедут в соседних вагонах?

Варианты ответов:	0,7	6/7	1/7	12/49

4. в) поедут в разных вагонах?

Варианты ответов:	0,7	6/7	1/7	12/49

5. Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что а) сумма числа очков не превосходит 5;

Варианты ответов:	5/18	5/36	1/5	4/18

6. б) произведение числа очков не превосходит 4;

Варианты ответов:	5/18	5/36	1/5	4/18

7. в) произведение числа очков делится на 2, если на одной кости выпала тройка.

Варианты ответов:	1/2	1/3	1/6	1/4

ТЕСТ 2 Вероятность сложных событий

1. В регионе имеются два предприятия: А и В, которые работают независимо друг от друга. Вероятность банкротства А в условиях глобального финансового кризиса составляет 0,7. Для В вероятность банкротства 0,4. Определить вероятность того, что:

а) обанкротятся оба предприятия

Варианты ответов:	0,18	0,82	0,28	1,1

2. б) не обанкротится ни одно предприятие

Варианты ответов:	0,18	0,82	0,28	1,1

3. в) обанкротится хотя бы одно предприятие

Варианты	0,18	0,82	0,28	1,1

ответов:				

4. г) обанкротится предприятие А, а предприятие В не обанкротится

Варианты ответов:	0,42	0,28	0,54	0,12

5. д) обанкротится предприятие В, а предприятие А не обанкротится

Варианты ответов:	0,42	0,28	0,54	0,12

6. е) обанкротятся одно из предприятий (не важно которое), а второе нет

Варианты ответов:	0,42	0,28	0,54	0,12

Формула полной вероятности. Формула Байеса.

На сборку попадают детали с 4-х автоматов. Известно, что первый автомат дает 1 % брака, второй 2 %, третий 4% и четвертый 3%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 300 деталей, со второго 200, с третьего 400 и с четвертого 100 деталей. Необходимо ответить на следующие вопросы.

1. Сколько гипотез необходимо составить:

Варианты ответов:	2	3	4	5

2. Сумма вероятностей всех гипотез равна…

Варианты ответов:	1	0,1	0,4	0,25

3. Какая вероятность, что случайно взятая деталь окажется бракованной?

Варианты ответов:	0,18	0,026	0,25	1

4. Случайно выбранная деталь оказалась бракованной. Какая вероятность, что она с четвертого автомата?

Варианты ответов:	0,026	0,25	0,03	0,12

ТЕСТ 3 Последовательности независимых испытаний. Схема Бернулли

Игральную кость бросают 7 раз. Какая вероятность того, что:

1. шесть очков выпадет 1 раз

Варианты ответов:	0,23	1/6	1/7	0,39

2. шесть очков выпадет 2 раза

Варианты ответов:	0,23	2/6	2/7	0,39

3. шесть очков выпадет менее 3 раз

Варианты ответов:	0,42	3/7	0,62	3/7

4. шесть очков выпадет не менее 2 раз

Варианты ответов:	0,23	4/7	5/7	0,38

ТЕСТ 4 Случайные величины

1. Закон распределения дискретной случайной величины есть:

X	1	2	3	4	5
P(X)	0,2	0,1	0,3	0,1	***p***

Тогда значение ***p*** равно …

Варианты ответов:	0,7	1	0,1	0,3

2. Интегральная функция распределения непрерывно распределенной случайной величины равна $F(x)$.
Тогда ее значение $F(+\infty)$ равно …

Варианты ответов:	0	1	+∞	-∞

3. А ее значение $F(-\infty)$ равно …

Варианты ответов:	0	1	+∞	-∞

Дифференциальная функция распределения (плотность вероятностей) непрерывно распределенной случайной величины равна $f(x)$.

4. Тогда ее значение $f(+\infty)$ равно …

Варианты ответов:	0	1	+∞	-∞

5. А при любом *x* значение $f(x)$ не может быть …

Варианты ответов:	0	1	Отрицательным	Больше единицы

Числовые характеристики случайных величин.

1. Закон распределения дискретной случайной величины есть:

X	-1	0	1	2	3
P(X)	0,2	0,1	0,4	0,1	0,2

Мода Mo(X) равна…

Варианты ответов:	5	1,8	1	1,7

2. Математическое ожидание M(X) равно…

Варианты ответов:	5	1,8	1	1,7

3. Дисперсия D(X) равна…

Варианты ответов:	2,8	1,8	1	1,7

4. Дифференциальная функция распределения непрерывно распределенной случайной величины равна $f(x)=\begin{cases} 1/2, & при\ \ x\in[0;2] \\ 0, & при\ \ x\notin[0;2] \end{cases}$

Математическое ожидание M(X) равно…

Варианты ответов:	0	2	1	1/3

5. Дисперсия D(X) равна…

Варианты ответов:	0	2	1	1/3

ТЕСТ5 Виды случайных величин. Нормальное распределение

1. Какой закон распределения описывает дискретную случайную величину?

Варианты ответов:	Показа-тельный	Нормаль-ный	Равно-мерный	Пуассона

2. Какая из представленных функций является интегральной функцией распределения показательного закона?

Варианты	$1-e^{-3x}$	$3e^{-3x}$	e^{-3x}	$6e^{-3x}$

ответов:				

3. Закон распределения Пуассона описывается формулой.

Варианты ответов:	$1-e^{-\lambda}$	$\lambda \cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^k \cdot e^{-\lambda}}{k!}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$

4. Плотность вероятностей нормального распределения равна

$$\varphi(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot 9}}$$

Математическое ожидание M(X) равно…

Варианты ответов:	0	2	3	9

5. Дисперсия D(X) равна…

Варианты ответов:	0	2	3	9

ТЕСТ 6 Математическая статистика. Методы представления выборочных данных

1. Выборка имеет вид: 5, 8, 3, 4, 5, 9, 3, 1, 6, 5.
Тогда ее объем равен…

Варианты ответов:	1	9	10	8

2. Размах выборки равен…

Варианты ответов:	1	9	10	8

3. Имеется интервальный ряд:

Интервал	[0;10)	[10;20)	[20;30)	[30;40]
X_i	3	8	9	5

Тогда объем выборки равен…

Варианты ответов:	9	25	90	40

4. При построении гистограммы высота первого (самого левого) столбца равна…

Варианты ответов:	3	0,12	0,3	10

5. Относительная частота последнего (правого) интервала равна…

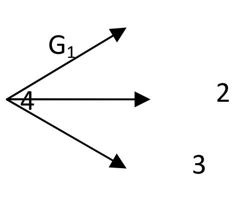
Варианты ответов:	0,2	1	5	40

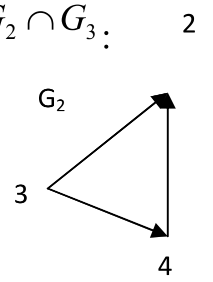
6. Относительная накопленная частота последнего (правого) интервала равна…

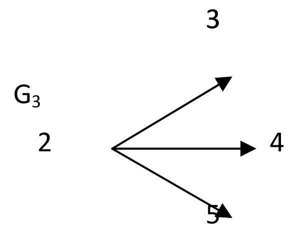
Варианты ответов:	0,2	1	5	40

Контрольная работа. Основы теории графов

1. Построить матрицы смежности и инцидентности графов $G_1 \cup G_2 \cup G_3$ и $G_1 \cap G_2 \cap G_3$:







2. Дано множество A=$\{1,2,3,4,5,6\}$. На этом множестве задано бинарное отношение
   “x и y отличаются друг от друга на 2”.
   Построить граф отношения, матрицу отношения.
   Является ли это отношение рефлексивным, симметричным, транзитивным?

Литература

Кочетков Е. С., Смерчинская С.О, Соколов В.В. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник- 2-е изд.- М.: ФОРУМ, 2014-240 стр.

Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник- 12-е изд .перераб. - М.: Издательство Юрайт, 2010- 470 стр.

Knigafund.ru

Учебное изфдание

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
ПО ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАНИЙ
по дисциплине Теория вероятностей и математическая статистика

для обучающихся по направлению 09.02.04 «Информационные системы (по отраслям)»

Составитель:
Киреев Юрий Владимирович
В авторской редакции

Подписано в печать 11.01.2016. Формат 60×84/16
АОНО ВО «Институт менеджмента, маркетинга и финансов»
394030, Воронеж, ул. Карала Маркса, 67
www.immf.ru